Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Ф. А. БЕРЕЗИН

ЛИНЕЙНЫЕ КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ЛИ С КОММУТАТИВНЫМ РАДИКАЛОМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 X 1953)

Группы Ли с коммутативным радикалом (к. р.) являются следующими по сложности группами после полупростых: согласно известной теореме Леви каждая группа разлагается в полупрямое произведение полупростой подгруппы и разрешимого нормального делителя, называемого радикалом. Коммутативная же группа является простейшей разрешимой.

В настоящей работе рассматриваются группы с к. р., которые не распадаются в прямое произведение группы с к. р. и коммутативной. Случай этот является, очевидно, основным. К нему относятся, например, группы всех движений (включающие параллельные переносы) евклидова или аффинного пространства.

1. Укажем важный для дальнейшего способ построения групп с к. р.

Пусть K — полупростая группа, Γ — ее линейное представление, действующее в пространстве $\mathfrak{N}$.

Элементами группы G являются пары: $(k, \mathfrak{n})$; $k \in K$, $\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}$.

Закон умножения задается формулой:

$$(k_1, \mathfrak{n}_1)(k_2, \mathfrak{n}_2) = (k_1 k_2, \Gamma(k_2^{-1})\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2). \quad (1)$$

Легко проверить, что этот закон действительно задает группу.

При помощи этой конструкции можно получить группу, локально изоморфную любой группе с к. р. и точно изоморфную группе, не распадающейся в прямое произведение группы такого же типа и коммутативной.

Радикал образуют пары $(e, \mathfrak{n}) = n \in N$, дополнительную полупростую подгруппу K — пары $(k, 0)$. Пространство $\mathfrak{N}$ удобно отождествлять с алгеброй Ли радикала.

2. Представления групп с к. р.

Теорема 1. *Пусть Φ — некоторое представление группы G с к. р.*

Матрицы $\Phi(k)$ и $\Phi(n)$ индуцированных представлений K и N имеют в некотором базисе вид:

$$\Phi(k) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & & & \\ & \varphi_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \varphi_s \end{pmatrix}; \qquad \Phi(n) = \begin{pmatrix} E & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ & E & \cdots & B_{2s} \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & E \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\varphi_i = \varphi_i(k)$ — *матрицы некоторых представлений* K; $B_{ij} = B_{ij}(n)$ — *прямоугольные матрицы, элементы которых суть многочлены над* $\mathfrak{N}$.

Базис, в котором матрицы $\Phi(k)$ и $\Phi(n)$ приводятся к виду (2), можно выбрать так, чтобы строки матриц B_{is}, входящих в последний столбец клеточной матрицы $\Phi(n)$, были линейно независимы. Такой базис называется каноническим.

Из формулы (2) видно, что для любого представления Φ группы с к. р. существует такое M, что $(\Phi(n) - E)^M = 0$ при всех $n \in N$. Если M_Φ — наименьшее из чисел, удовлетворяющих этому условию, то $M_\Phi - 1$ называется степенью представления Φ.

Рассмотрим вектор-функцию над $\mathfrak{N}$; если компоненты ее суть многочлены степеней $\leqslant m$, то мы называем ее вектор-многочленом (коротко, в.-м.) степени m.

Пусть R — некоторое пространство в.-м., значения которых заполняют линейное пространство $\overline{R}$. Пространство R называется п р о с т ы м, если значения в.-м. 0-й степени, входящих в него, исчерпывают $\overline{R}$.

В пространстве всех в.-м. степени $\leqslant m$, принимающих значения из R_φ — пространства, в котором действует представление φ группы K^*, определим операторы

$$\begin{gathered} T_k f(\mathfrak{n}) = f(\Gamma(k)\mathfrak{n})\,\varphi(k)\,^{**}, \\ T_{n'} f(\mathfrak{n}) = f(\mathfrak{n} + \mathfrak{n}'). \end{gathered} \tag{3}$$

Легко проверить, что формулами (3) задается некоторое представление группы G с к. р. Мы будем обозначать его $\Gamma_{m\varphi}$.

Т е о р е м а 2. *Каждое представление* Φ *степени* m *группы с к. р. может быть осуществлено в некотором инвариантном подпространстве пространства представления* $\Gamma_{m\varphi}$ *и не может быть осуществлено ни в каком инвариантном подпространстве пространства представления* $\Gamma_{m-1\,\varphi}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть канонический базис в R_Φ состоит из векторов ξ_i^t. Тогда $\Phi(n)\,\xi_i^t = \xi_i^t + \sum\limits_{t'i'} b_{ii'}^{tt'}\,\xi_{i'}^{t'}$ (нижние индексы у $b_{ii'}^{tt'}$ указывают клетку, которой элемент $b_{ii'}^{tt'}$ принадлежит, верхние — место элемента в этой клетке).

Поставим в соответствие каждому ξ_i^t строку $(b_{is}^{t1}\, b_{is}^{t2} \ldots b_{is}^{tk})$ матрицы B_{is} — элемента последнего столбца матрицы $\Phi(n)$. В силу того, что базис из векторов ξ_i^t является каноническим, это соответствие продолжается во взаимно-однозначное соответствие между пространством R_Φ и пространством в.-м. над $\mathfrak{N}$, образованных линейными комбинациями строчек матриц B_{is}.

При помощи непосредственной выкладки проверяется, что если $\xi \leftrightarrow f_\xi(\mathfrak{n})$, то $\Phi(g)\,\xi \leftrightarrow T_g f_\xi(\mathfrak{n})$, где $T_g = T_k T_n$ и операторы T_k, T_n действуют по формулам (3) с заменой φ на φ_s. Наибольшая степень в.-м., входящих в это пространство, равна m.

Построенное при доказательстве теоремы 2 пространство в.-м. является простым.

Т е о р е м а 3. *Пусть* Φ *и* $\tilde{\Phi}$ — *два эквивалентные представления группы с к. р., реализованные в простых пространствах* R_Φ *и* $R_{\tilde{\Phi}}$.

---

* В дальнейшем, если представление некоторой группы или алгебры обозначено буквой Φ, $\varphi, \ldots$, то пространство, в котором оно действует, обозначено R_Φ, $R_\varphi, \ldots$

** В.-м. $f(\mathfrak{n})$ записывается как строчка своих координат.

Тогда между элементами $f \in R_\Phi$ *и* $\tilde{f} \in R_{\tilde{\Phi}}$ *можно установить такое взаимно-однозначное соответствие, что если* $f \leftrightarrow \tilde{f}$, *то* $T_g f \leftrightarrow T_g \tilde{f}$ *и* $f(\mathfrak{n}) = \tilde{f}(\mathfrak{n})$ *при всех* $\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}$.

В дальнейшем под пространствами, в которых действуют представления G, понимаются простые пространства.

Рассмотрим некоторые специальные представления.

Представление Φ называется каноническим, если пространство R_Φ можно так разложить на неприводимые относительно полупростой подгруппы K, чтобы каждое из них состояло из однородных в.-м. ($\Gamma_{m\varphi}$ является каноническим представлением).

Матрицы канонического представления алгебры $\mathfrak{G}$* в каноническом базисе имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1\mathfrak{B}_1 & & & & & 0 \\ & \varphi_2\mathfrak{B}_2 & & & & \\ & & \varphi_3\mathfrak{B}_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & \varphi_{s-1}\mathfrak{B}_{s-1} & \\ & & & & & \varphi_s \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Здесь $\varphi_i = \varphi_i(\mathfrak{k})$ — матрицы некоторых представлений полупростой алгебры $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{B}_i(\mathfrak{n})$ — прямоугольные матрицы, элементы которых суть линейные формы над $\mathfrak{N}$.

Теорема 4. *Для того чтобы матрица* (4) *определяла некоторое каноническое представление* Φ *алгебры* $\mathfrak{G}$, *необходимо и достаточно, чтобы матрицы* $\begin{pmatrix} \varphi_i & \mathfrak{B}_i & 0 \\ 0 & \varphi_{i+1} & \mathfrak{B}_{i+1} \\ 0 & 0 & \varphi_{i+2} \end{pmatrix}$ *определяли при каждом* i *каноническое представление* $\mathfrak{G}$ 2-й степени.

Рассмотрим представление $\Gamma_{m\varphi}$ с неприводимым φ. Из подпространства однородных в.-м. степени m выделим неприводимое относительно K подпространство Q_m. Линейная оболочка L пространств $T_n Q_m$ инвариантна относительно преобразований (3). Эти преобразования задают в L представление группы G, называемое моногенным (оно, очевидно, является каноническим).

Теорема 5. *Пусть* Φ — *произвольное представление группы с к. р. Существуют такие моногенные представления* $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ *и такие инвариантные подпространства* $R' \subseteq R$ *пространства* $R_{\Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_n}$, *что представление, порождаемое* $\Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_n$ *в фактор-пространстве* R/R', *эквивалентно* Φ.

Теоремы 2—5 сводят задачу об отыскании всех конечномерных представлений групп с к.-р. к определению моногенных 1-й и 2-й степеней. Для того чтобы определить их, нужно выделить неприводимые подпространства Q_1, Q_2 из пространства всех в.-м. Задача эта сводится к разложению кронекеровского произведения неприводимых представлений группы K. В случае, когда K (локально) изоморфно группе всех (или всех унитарных) матриц 2-го порядка с определителем 1, разложение осуществляется вполне эффективно, что позволяет описать моногенные представления 1-й и 2-й степеней.

Поступило
14 X 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Г. Чеботарев, Теория групп Ли, 1940. [2] П. К. Рашевский, Усп. матем. наук, **8**, 1, 3 (1953). [3] E. Cartan, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, **53**, 217 (1929).

* Готическими буквами $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{N}$ обозначены алгебры Ли, соответствующие группам G, K, N. Элементы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{N}$ обозначены $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{n}$.