Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 5

МАТЕМАТИКА

А. А. АБРАМОВ

ФОРМУЛА ТИПА ГАУССА — БОННЭ ДЛЯ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ ПОНТРЯГИНА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 20 X 1953)

1°. Пусть A_n — n-мерное пространство аффинной связности класса дифференцируемости $k \geqslant 3$ с объектом связности $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и тензором кривизны $R^{\alpha}_{\beta,\,\gamma\delta}$. Будем рассматривать в A_n тензорные поля Понтрягина ([1]):

$$\Pi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{2q}} = R^{\alpha_1}_{\alpha_2,\,[\varkappa_1\varkappa_2} R^{\alpha_2}_{|\alpha_3|,\,\varkappa_3\varkappa_4} \cdots R^{\alpha_q}_{|\alpha_1|,\,\varkappa_{2q-1}\varkappa_{2q}]}\,, \tag{1}$$

$$\Phi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} = \sum c \Pi_{[\varkappa_1 \ldots} \cdots \Pi_{\ldots \varkappa_p]}, \tag{2}$$

$$\Psi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} = \Psi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{4q}} = \sum c \Pi_{[\varkappa_1 \ldots \varkappa_{4q_1}} \cdots \Pi_{\ldots \varkappa_{4q}]}\,, \tag{3}$$

c — постоянные.

Пусть V_r — r-мерная область в A_n и пусть на V_r задано поле n-репера $E\{\underset{1}{e}, \ldots, \underset{n}{e}\}$. Обозначим $d\underset{b}{e} = \omega^a_b \underset{a}{e}$, где $d\underset{b}{e}$ — ковариантный дифференциал $\underset{b}{e}$ и ω^a_b — линейные дифференциальные формы на V_r. Как известно, $(\omega^a_b)' = [\omega^c_b \omega^a_c] + \Omega^a_b$, $\Omega^a_b = {}^1/_2 R^a_{b,\,c_1c_2}[dx^{c_1} dx^{c_2}]$. На V_r $\underset{p}{\Pi} = \frac{1}{2^p} \Pi_{k_1 \ldots k_{2p}} [dx^{k_1} \cdots dx^{k_{2p}}] = [\Omega^{a_1}_{a_2} \Omega^{a_2}_{a_3} \cdots \Omega^{a_{p-1}}_{a_1}]$. Для $\Phi = \Phi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}[dx^{\varkappa_1} \cdots dx^{\varkappa_p}]$ ($\Phi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ — поле типа (2)) построим по исходной аффинной связности и полю E форму X на V_r такую, что $X' = \Phi$.

Определим на V_r $\underset{m}{\Omega}{}^a_b = [\Omega^{c_1}_b \Omega^{c_2}_{c_1} \cdots \Omega^a_{c_{m-1}}]$. Запишем $\underset{m}{\Omega}{}^a_b = \sum_{s=0}^{m} \overset{s}{\underset{m}{\Omega}}{}^b_a$, где форма $\overset{s}{\underset{m}{\Omega}}{}^a_b$ в записи по ω^c_d и $(\omega^c_d)'$ однородна степени s по совокупности $(\omega^c_d)'$. Индукцией по m легко показать, что $\left(\overset{s}{\underset{m}{\Omega}}{}^a_b\right)' = \left[\omega^c_b \overset{s+1}{\underset{m}{\Omega}}{}^a_c\right] - \left[\overset{s+1}{\underset{m}{\Omega}}{}^c_b \omega^a_c\right]$. Применяя к $\overset{s+1}{\underset{m}{\Omega}}{}^a_a$ и $\overset{s}{\underset{m}{\Omega}}{}^a_a$ теорему Эйлера об однородных функциях, получим: $m\left[\overset{s}{\underset{m-1}{\Omega}}{}^a_b (\omega^b_a)'\right] = (s+1) \overset{s+1}{\underset{m}{\Omega}}{}^a_a$, $-m\left[\overset{s}{\underset{m-1}{\Omega}}{}^a_b \omega^c_a \omega^b_c\right] = (m-s) \overset{s}{\underset{m}{\Omega}}{}^a_a$. Если мы составим $\underset{q}{X} = \sum_{s=0}^{q-1} \frac{q}{2q-s-1} \left[\overset{s}{\underset{q-1}{\Omega}}{}^a_b \omega^b_a\right]$, то, используя выписанные равенства, нетрудно подсчитать, что $\underset{q}{X}' = \underset{q}{\Omega}{}^a_a = \underset{q}{\Pi}$.

Очевидно, $\underset{q}{\Pi'} = 0$. Для $\Phi = \sum c [\underset{q_1}{\Pi} \underset{q_2}{\Pi} \cdots \underset{q_k}{\Pi}]$ возьмем

$$X = \sum c\,]X \underset{q_1}{\Pi} \underset{q_2}{\Pi} \cdots \underset{q_k}{\Pi}], \tag{4}$$

тогда $X' = \Phi$. Если C_{r-1}, $r = 2(q_1 + q_2 + \ldots + q_k)$, ограничивает V_r, то $\int\limits_{V_r} \Phi = \int\limits_{V_r} X' = \int\limits_{C_{r-1}} X$.

Теорема. *Пусть цикл C_{p-1} ограничивает $D_p \subset A_n$ и пусть на C_{p-1} задано поле n-репера E. Составим на C_{p-1} по E и $\Phi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ форму X по формуле* (4). *Тогда* $\int\limits_{D_p} \Phi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} dx^{\varkappa_1} \cdots dx^{\varkappa_p} - \int\limits_{C_{p-1}} X$ *не зависит от исходной аффинной связности и не меняется при непрерывной деформации E.*

Доказательство. Достаточно рассматривать $\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и δE — изменения величин $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и E, равные нулю вне некоторой малой области U, так как в виде суммы таких представляется любая деформация. Обозначим ${}_1D_p = D_p \cap U$, ${}_2D_p = D_p - {}_1D_p$; ${}_1C_{p-1}$ и ${}_2C_{p-1}$ — границы, соответственно, ${}_1D_p$ и ${}_2D_p$. Распространив на U поле E, получим

$$\delta \Big[\int\limits_{D_p} \Phi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} dx^{\varkappa_1} \cdots dx^{\varkappa_p} - \int\limits_{C_{p-1}} X \Big] =$$

$$= \delta \Big[\int\limits_{{}_1D_p} \Phi - \int\limits_{{}_1C_{p-1}} X \Big] + \delta \Big[\int\limits_{{}_2D_p} \Phi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p} - \int\limits_{{}_2C_{p-1}} X \Big] = 0.$$

Эта теорема является аналогом формулы Гаусса — Боннэ для полей Понтрягина.

2°. Если C_p — цикл в A_n, то $\int\limits_{C_p} \Phi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p}$ не меняется при изменении аффинной связности в A_n. В самом деле, при изменении $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ внутри малой области (а такими изменениями, как уже говорилось выше, при рассмотрении можно ограничиваться) введем в эту область поле n-репера и применим теорему. Таким образом, поля $\Phi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ дают топологические инварианты (в смысле достаточно гладкого изменения аффинной связности). Введя в A_n аффинную связность, порождаемую в окрестности C_p римановой метрикой, и пользуясь результатом работы [2], легко убедиться, что инварианты, получаемые интегрированием полей типа (3), суть единственные, которые можно получить интегрированием кососимметрических тензорных полей, компоненты которых аналитические функции $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, $\partial_\mu \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}, \ldots, \partial_{\mu_1 \ldots \mu_s} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ (и что $\int\limits_{C_p} \Phi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p} = 0$, если $\Phi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ является полем типа (2), но не является полем типа (3)).

Автор благодарен И. М. Гельфанду, под руководством которого сделана эта работа.

Поступило
6 X 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, ДАН, **43**, № 3, 95 (1944). [2] А. А. Абрамов, ДАН, **81**, № 2, 125 (1951).