

Л. Н. ДЕРЮГИН

К ТЕОРИИ ДИФФРАКЦИИ НА ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ

(Представленно академиком М. А. Леонтовичем 22 X 1953)

Ранее (1) были получены уравнения для коэффициентов отражения от периодически неровной поверхности с прямоугольными канавками. Основываясь на изложенном в (1) методе и сохраняя принятые там условия и обозначения, мы выведем теперь аналитические формулы, дающие распределение полей в раскрыве канавок и коэффициенты отражения R_n для случая, когда ширина канавок $2a$ мала по сравнению с длиной волны λ , т. е. $k_0 a \ll 1$, где $\alpha = a/\pi$.

Для узких канавок удобно начать решение задачи с вычисления амплитуд парциальных полей в раскрыве канавок C_m . Поступая так же как в (1) при выводе магнитных уравнений связи (11), но исходя теперь из электрических уравнений непрерывности $E_I = E_{II}$ ((1), уравнения (8)), получим электрические уравнения связи:

$$R_0 = A_0 = 1 + j \frac{\alpha' t_0}{k_0} C_0, \quad k_n R_n = \frac{1}{2} k_n A_n = j \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} t_i P_{ni} C_i \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1)$$

подставляя которые в магнитные уравнения связи, приходим к системе уравнений для определения C_m :

$$C_0 = 2 + j \frac{\alpha^2 \pi^2 + 2k_0 S_{00}}{k_0 \alpha \pi^2} t_0 C_0 + j \frac{2}{\alpha \pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} t_i S_{0i} C_i,$$

$$C_m = j \frac{4t_0 S_{m0}}{\pi \alpha^2} C_0 + j \frac{4}{\alpha \pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} t_i S_{mi} C_i \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (2)$$

где $S_{mi} = (-1)^{m+i} \alpha^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin^2 \pi n \alpha}{(n^2 \alpha^2 - m^2)(n^2 \alpha^2 - i^2) \sqrt{k_0^2 - r^2}}$. С точностью до

малого параметра $k_0 \alpha$ по сравнению с единицей ряды S_{mi} могут быть заменены интегралами и сведены к интегральным синусам и подобным им функциям, применив к которым асимптотические формулы, дающие в нашем случае погрешность в несколько процентов, найдем, что

$$S_{mi} = (-1)^{m+i} \alpha^2 \left[j \frac{L_{mi}}{2} + \frac{\pi^2 \alpha^4 r^4}{m^2 i^2 \sqrt{k_0^2 - r^2}} \right] \quad (m \neq 0, i \neq 0),$$

$$S_{m0} = (-1)^{m\alpha^2} \left[j \frac{\ln(Mm)}{2m^2} - \frac{\pi^2 \alpha^2 r^2}{m^2 \sqrt{k_0^2 - r^2}} \right] \quad (m \neq 0), \quad (3)$$

где $L_{mi} = \frac{\ln m - \ln i}{m^2 - i^2}$ при $m \neq i$, $L_{mm} = -\frac{\pi^2}{2m}$ и $\ln M = 2,415$, а

$$S_{00} = -j \alpha^2 \pi^2 (F_k - \ln \alpha), \quad (4)$$

где $F_k = \sigma'_0 - 0,915 + j \left(\sigma_0 + \frac{1}{\sqrt{k_0^2 - r^2}} \right)$, $\sigma'_0 = \sum_{n=r+1}^{3r-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k_0^2}} - \ln 3r$,

$\sigma_i = \sum_{n=1}^{r-1} \frac{n^i}{\sqrt{k_0^2 - n^2}}$, а r — целое число, ближайшее к постоянной рас-

пространения k_0 . В настоящей работе мы опустим кроме того вторые слагаемые в (3), которые вне зависимости от своих порядков малости $(k_0\alpha)^4$ и $(k_0\alpha)^2$ стремятся к ∞ , когда $k_0 \rightarrow r$. Вследствие этого нельзя будет гарантировать применимость полученных ниже формул в малых окрестностях $|k_0 - r| \ll k_0^2\alpha/2r$ целочисленных значений k_0 , в которых указанные члены превышают малый параметр $k_0\alpha$. Приняв дополнительно, что $h > a$, с точностью в несколько процентов имеем $t_{i \neq 0} = -i/\alpha$. Подставляя найденные значения S_{mi} и t_i в систему (2), получим:

$$C_0 = \frac{2 + \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \ln(Mi) C_i}{1 - j\alpha \operatorname{tg} k_0 h \cdot [1 - 2j k_0 \dot{F}_k]}, \quad (5)$$

$$C_m = -\frac{(-1)^m \alpha k_0 \operatorname{tg} k_0 h \ln(Mm)}{\pi^2 m^2} C_0 + \frac{(-1)^m}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i i L_{mi} C_i \quad (i \neq m). \quad (6)$$

Решение системы может быть представлено в виде

$$C_m = \frac{-(-1)^m \alpha k_0 \operatorname{tg} k_0 h}{\pi^2} \frac{z_m}{m} C_0 \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (7)$$

где постоянные числа z_m , зависящие лишь от номера m , суть решения вполне регулярной системы с постоянными численными коэффици-

циентами $z_m = \frac{\ln(Mm)}{m} + \frac{m}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} L_{mi} z_i \quad (i \neq m)$, которая получается при

подстановке (7) в (6). Исследование этой системы показало, что постоянные z_m/m , входящие в (7), быстро убывают с ростом m так, что $\frac{\ln(Mm)}{m^2} < \frac{z_m}{m} < \frac{7,44}{m^{1,5}} - \frac{4,37}{m}$. Значения первых 10 постоянных, найденные

решением системы методом итераций, приведены в табл. 1.

Таблица 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2,52	0,895	0,476	0,303	0,212	0,160	0,126	0,102	0,0868	0,0732

Подставив (7) в (5), разрешив (5) относительно C_0 и подставив затем C_0 снова в (7), получим формулы для вычисления C_0 и C_m :

$$C_0 = \frac{2}{1 - 2k_0 \alpha \dot{\Phi} \operatorname{tg} k_0 h}, \quad C_m = -\frac{(-1)^m z_m}{\pi^2 m} \frac{2k_0 \alpha \operatorname{tg} k_0 h}{1 - 2k_0 \alpha \dot{\Phi} \operatorname{tg} k_0 h}, \quad (8)$$

где $\dot{\Phi} = \dot{\Phi}_k - \ln \alpha$, а $\dot{\Phi}_k = \dot{F}_k + j \frac{1}{2k_0} - 0,0462$. Графики функции $\xi(k_0) = \operatorname{Re} \dot{\Phi}_k$ и $\eta(k_0) = \operatorname{Im} \dot{\Phi}_k$ представлены на рис. 1. За счет члена $1/\sqrt{k_0^2 - r^2}$, входящего в $\dot{\Phi}_k$, при приближении к особым точкам $k_0 = r$ либо $\xi(k_0)$, либо $\eta(k_0)$ стремится к ∞ .

Подставив C_0 и C_m из (8) в (7) ⁽¹⁾, найдем распределение магнитного поля и тангенциальной компоненты E в раскрыве канавок (поля отнесены к соответствующим компонентам поля падающей волны):

$$H(x) = \frac{2[1 - k_0 \alpha \operatorname{tg} k_0 h \cdot f_H(x)]}{1 - 2k_0 \alpha \dot{\Phi} \operatorname{tg} k_0 h}, \quad E(x) = \frac{-2j \operatorname{tg} k_0 h \cdot [1 + f_E(x)]}{1 - 2k_0 \alpha \dot{\Phi} \operatorname{tg} k_0 h}. \quad (9)$$

Знакопеременные части функций распределения даются рядами

$$f_H(x) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{z_m}{m} \cos m \frac{\pi}{a} x \text{ и } f_E(x) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m z_m \cos m \frac{\pi}{a} x,$$

а их графики приведены на рис. 2. У острых краев канавок ($|x| = a$), как и следовало ожидать, ряд для $f_E(x)$ расходится и $E(x)$ обращается в бесконечность.

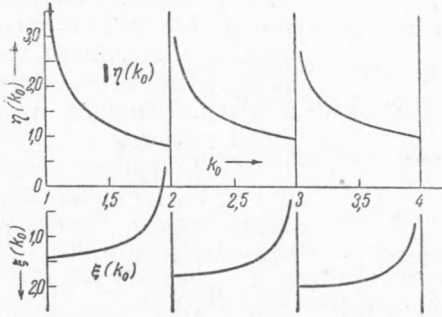


Рис. 1

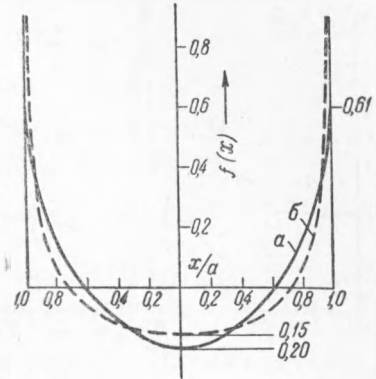


Рис. 2. а — $f_H(x)$, б — $f_E(x)$

Подставив C_0 и C_m в уравнения связи (1), найдем коэффициенты отражения

$$R_0 = 1 + j \frac{2\alpha \operatorname{tg} k_0 h}{1 - 2k_0 \alpha \Phi \operatorname{tg} k_0 h}, \quad R_n = j \frac{2\alpha \operatorname{tg} k_0 h \cdot \left[1 - \frac{n^2 \alpha^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z_m}{m^2} \right]}{\cos \varphi_n \cdot [1 - 2k_0 \alpha \Phi \operatorname{tg} k_0 h]} \quad (10)$$

$$(n = 1, 2, \dots, r),$$

где $\cos \varphi_n = \sqrt{k_0^2 - n^2}/k_0$, а φ_n — углы отражения. Так как $S =$

$$= \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} z_m/m^2 = 0,338, \text{ то членом } 0,338 n^2 \alpha^2, \text{ учитывающим связь}$$

коэффициентов отражения с полями высших порядков ($m > 0$) в канавках, вполне можно пренебречь. Это, между прочим, свидетельствует о том, что для вычисления R_0 и R_n в рассматриваемом случае можно было бы аппроксимировать поле в канавках одной лишь постоянной составляющей C_0 . Отраженная мощность, вычисленная по формулам (10), равна падающей мощности. Коэффициенты рассеяния $R_{n \neq 0}$ являются малыми величинами порядка α .

На рис. 3 и 4 приведено несколько кривых, вычисленных по формулам (8) и (10) и показывающих зависимость $|C_0|$, $|C_1|$, $|R_0|$ и $|R_1|$ от глубины канавок h . Рассматривая эту зависимость и оставляя в стороне значения k_0 , близкие к целым числам r , когда $|\Phi|$ становится очень большим, можно отметить два характерных случая.

1) Случай полуволновой глубины канавок $h = i\lambda/2$ ($i = 1, 2, \dots$), когда, согласно (8), (9) и (10), $|C_0| = 2$, $|C_m| = 0$, $H(x) \equiv 2$, $E(x) \equiv 0$, $|R_0| = 1$, $|R_n| = 0$, т. е. имеет место чисто зеркальное отражение.

2) Случай максимального рассеяния, имеющий место при глубине канавок, которая несколько меньше $1/4$ волны и определяется из уравнения $\operatorname{ctg} k_0 h = 2k_0 \alpha \Phi$. В этом случае, связанном с $1/4$ -волновым глубинным резонансом в канавках, формулы (8), (9) и (10) принимают вид:

$$|C_0| = 2 \left| \frac{\xi'}{\eta} \right|, \quad |C_m| = \frac{z_m}{\pi^2 m} \frac{1}{|\eta|}, \quad |R_0| = \sqrt{1 - \frac{2\sigma_0}{k_0 \eta^2}}, \quad |R_n| = \frac{1}{|\eta| k_0 \cos \varphi_n}, \quad (11)$$

$$H(x) = \frac{2\xi'}{\eta} \left[1 - \frac{1}{2\xi'} f_H(x) \right], \quad E(x) = -j \frac{1 + f_E(x)}{\eta k_0 \alpha},$$

где $\xi' = \xi(k_0) - \ln \alpha$. Напряженность электрического поля в раскрые канавок становится большой величиной порядка $(k_0 \alpha)^{-1}$, а рассеиваемая

мощность, несмотря на малую ширину канавок, составляет, например, при $k_0 = 1,9$, около 84% падающей мощности. Экстремальные значения коэффициентов отражения R_0 и R_m не зависят от ширины канавок α .

Рассматривая зависимость R_n от k_0 за пределами малых интервалов $|k_0 - r| \ll k_0^2 \alpha / 2r$, следует отметить, что, согласно (10), коэффициенты рассеяния R_n ($n \neq 0$,

$n \neq r$) при $k_0 \rightarrow r$ слева сначала растут, достигая максимума вблизи особых точек $k_0 = r$, но при дальнейшем приближении к этим точкам быстро падают, а при $k_0 \rightarrow r$ справа монотонно уменьшаются. Однако в самих особых точках $k_0 = r$ (т. е. за пределами своей применимости) формулы (8),

(9) и (10) приводят к чисто зеркальному отражению: $|R_0| = 1$, $|R_n| = 0$ ($n \neq 0$, $n \neq r$), $|R_r| = 1$, $E(x) \equiv 0$, $H(x) \equiv 2$. Это неправильный результат. В самом деле, если $E(x) \equiv 0$ в раскрые канавок, то последние превращаются в не связанные с внешним пространством резонаторы, собственные колебания которых имеют частоты, не совпадающие с заданной $\omega = ck_0$, и, следовательно, возникнуть не могут, откуда $E(x, y) \equiv 0$ по всему объему канавок, что невозможно ввиду наличия падающей волны. Между прочим, из того, что в раскрые канавок тангенциальная компонента **E** не может тождественно равняться нулю, а при $k_0 = r$ отраженные волны r -го порядка скользят вдоль решетки и не имеют, таким образом, тангенциальной компоненты **E**, следует, что при $k_0 = r$ распределение тангенциальной компоненты **E** в раскрые узких канавок должно быть существенно знакопеременным, и в этом случае принципиально нельзя аппроксимировать поле в раскрые канавок одной лишь постоянной составляющей C_0 . Таким образом, случай $k_0 = r$ требует специального более тонкого исследования.

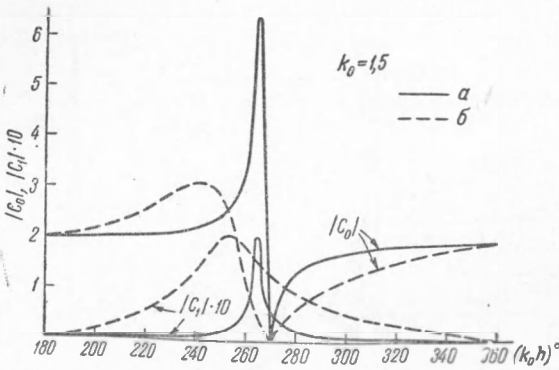


Рис. 3. $k_0 = 1,5$. $a - k_0 \alpha = 0,01$; $b - k_0 \alpha = 0,10$

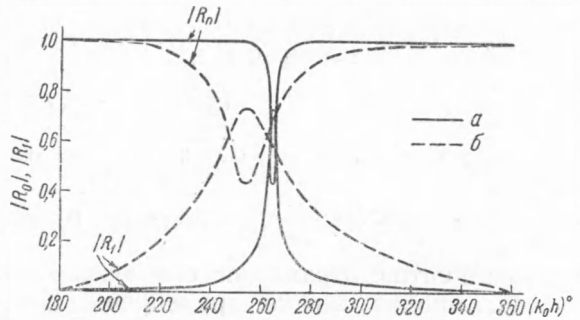


Рис. 4. $k_0 = 1,5$. $a - k_0 \alpha = 0,01$; $b - k_0 \alpha = 0,10$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Н. Дерюгин, ДАН, 87, № 6 (1952).

Поступило
12 X 1953