

О вкладах высших порядков в аномальные магнитные моменты лептонов от поляризации вакуума лептонными петлями

Василий Лашкевич и Ольга Соловцова*

*Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого,
пр-т Октября, 48, 246746, г. Гомель, Беларусь*

Олег Теряев и Марина Кожевникова†

*Объединенный институт ядерных исследований,
ул. Жоліо-Кюри, 6, 141980, Московская область, г. Дубна, Россия*

Мы изучаем вклады высших порядков в аномальные магнитные моменты лептонов от диаграмм поляризации вакуума одинаковыми лептонными петлями в случае, когда отношение массы лептона в петлях к массе внешнего лептона меньше единицы. Выражения для коэффициентов разложения, полученные в этом случае, уточняют известные и для реальных физических масс лептонов применимы при любом порядке разложения.

PACS numbers: 13.40.Eh, 12.20.Ds, 14.60.Ef

Keywords: anomalous magnetic moment of the leptons, electromagnetic corrections

1. Введение

Теоретическое и экспериментальное изучение аномальных магнитных моментов заряженных лептонов на протяжении многих десятилетий и по настоящее время (см., например, обзоры [1, 2]) играет важную роль в развитии представлений о взаимодействии элементарных частиц и теорией их описывающих. Имеющиеся в настоящее отклонение между прецизионными измерениями аномальных магнитных моментов электрона и мюона и высокоточными теоретическими расчетами этих величин (отклонение на уровне $2,5\sigma$ для электрона и $\sim 3,5\sigma$ для мюона) стимулирует постановку новых экспериментов, проверку и уточнение теоретических предсказаний в рамках Стандартной Модели физики частиц и поиск проявлений новой физики за её пределами.

Целью настоящей работы является нахождение аналитических выражений в высших порядках разложения по постоянной тонкой структуры α для вклада в аномальный магнитный момент лептона с массой m_L от диаграмм поляризации вакуума одинаковыми замкнутыми лептонными петлями (см. рисунок 1) с массой виртуального лептона m_l , в случае $m_l/m_L < 1$. Будет показано, что полученные выражения являются более точными, чем полученные в работах [3, 4] выражения, и хорошо работают как при малых, так и больших n . Для реальных физических масс лептонов будет дана оценка порядка $n^*(t)$, начиная с которого полученные аналитические выражения обеспечивают ту или иную точность.

*E-mail: solovtsova@gstu.gomel.by

†E-mail: teryaev@theor.jinr.ru; E-mail: m_kojevnikova@mail.ru

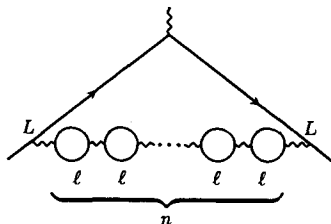


Рисунок 1: Диаграмма поляризации вакуума лептонными петлями $\ell^+ \ell^-$, дающая вклад в аномальный магнитный момент лептона $(g-2)_L$.

2. Мотивация

Электродинамический вклад в аномальный магнитный момент лептона L , отвечающий поляризации вакуума замкнутыми лептонными петлями (см. рисунок 1), можно записать как разложение по постоянной тонкой структуры α в виде (см., например, [3])

$$\alpha_L(t) = \sum_{n=1} a_n(t) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{n+1}, \quad (1)$$

где коэффициенты разложения выражаются через интеграл

$$a_n(t) = \int_0^1 (1-x) [-f(x,t)]^n dx, \quad (2)$$

в котором функция $f(x,t)$, определяемая поляризационным оператором $\Pi(x,t)$, $\Pi(x,t) \equiv \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) f(x,t)$, имеет вид

$$f(x,t) = \frac{5}{9} - \frac{4t(1-x)}{3x^2} + \frac{2t(1-x) - x^2}{3x^3} \sqrt{4t(1-x) + x^2} \ln \left[\frac{(x + \sqrt{4t(1-x) + x^2})^2}{4t(1-x)} \right]. \quad (3)$$

Здесь и далее через t обозначается квадрат отношения масс лептона в петле m_ℓ к массе внешнего лептона m_L :

$$t = \left(\frac{m_\ell}{m_L}\right)^2. \quad (4)$$

В сумму (1) мы не включили слагаемое с $n=0$ – известный результат Швингера [5], согласно которому лидирующее универсальное слагаемое есть $\frac{\alpha}{2\pi}$.

Отметим, что соответствие между обычно используемыми в настоящее время обозначениями (см., например, [2, 6, 7]) электродинамических коэффициентов A_1 и A_2 и a_n в разложении (1) следующее: $a_n \Rightarrow A_{1 \text{ v.p.}}^{(2n+2)}$, в случае, если все лептоны одного сорта, и $a_n \Rightarrow A_{2 \text{ v.p.}}^{(2n+2)}$, если лептоны в петле отличаются от внешнего лептона. Подчеркнем, что для коэффициентов $a_n(t)$ при $t=1$ известны точные выражения вплоть до $n=13$ [4], тогда как для $t \neq 1$, точные аналитические выражения получены только для $n=1$ и 2 , а для $n=3$ и 4 имеются асимптотические разложения при малых $t < 1$ [8, 9] и больших $t > 1$ [9, 10].

Таблица 1: - Коэффициенты $a_n(t)$ в разложении (1) в зависимости от порядка n при разных значениях t , включая $t_1 = t(m_\mu/m_\tau)$, $t_2 = t(m_e/m_\mu)$ и $t_3 = t(m_e/m_\tau)$.

t	1	$1 \cdot 10^{-2}$	$t_1 \approx 3.5 \cdot 10^{-3}$	$t_2 \approx 2.3 \cdot 10^{-5}$	$t_3 \approx 8.3 \cdot 10^{-8}$
$n = 1$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	0.25	0.36	1.1	2.0
$n = 5$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	0.41	1.3	$5.9 \cdot 10^1$	$7.6 \cdot 10^2$
$n = 10$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	6.3	$3.4 \cdot 10^1$	$1.8 \cdot 10^4$	$1.9 \cdot 10^6$
$n = 20$	$1.2 \cdot 10^1$	$1.2 \cdot 10^5$	$9.1 \cdot 10^5$	$8.8 \cdot 10^9$	$2.8 \cdot 10^{13}$
$n = 40$	$1.1 \cdot 10^{15}$	$1.1 \cdot 10^{19}$	$8.7 \cdot 10^{19}$	$2.0 \cdot 10^{24}$	$1.4 \cdot 10^{29}$

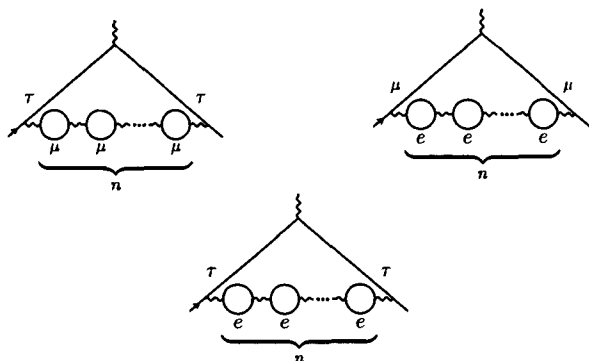


Рисунок 2: Диаграммы поляризации вакуума, соответствующие реальным физическим случаям, если $t < 1$.

В таблице 1 представлены значения коэффициентов $a_n(t)$, полученные численным интегрированием (2) при значениях $t \leq 1$. Соответствующие коэффициенты обозначены как a_n^{exact} . Выбранные значения $t_1(m_\mu/m_\tau \approx 16.82)$, $t_2(m_e/m_\mu \approx 207)$ и $t_3(m_e/m_\tau \approx 3477.5)$ отвечают реальным физическим случаям и соответствуют трем диаграммам, изображенным на рисунке 2. (Значения $t = 1$ и $t = 0.01$ взяты для полноты рассмотрения и сравнения с расчетами из работы [4].) На наш взгляд представляет интерес выявить закономерности и получить аналитические выражения для представленных в таблице 1 столь разных по величине значениях.

Впервые аналитическое выражение для коэффициентов $a_n(t)$ при $t = 1$ и больших номерах n было получено в работе [3], используя метод седловой точки в области x близких к 1. Эффективность применения этого метода связана с поведением подинтегральной функции $F_n(x, t) \equiv (1-x)[-f(x, t)]^n$ в выражении (2). Как демонстрируют рисунки 3 и 4, а также рисунок 5 (пунктирные линии), функция $F_n(x, t)$ имеет универсальную точку, через которую эта функция проходит независимо от n . После прохождения этой точки при $n > 1$ происходит смена режима и функция начинает расти тем быстрее, чем больше n . Поскольку при $x = 1$ функция $F_n(x, t)$ обращается в ноль, то возникает резкий максимум, что позволяет сделать оценку a_n , используя метод седловой точки. Приведенное в работе [3] выражение

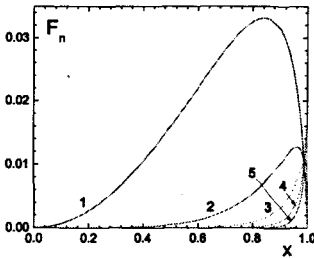


Рисунок 3: Поведение точной подинтегральной функции в (2) при разных значениях n (цифры у кривых) и $t = 1$.

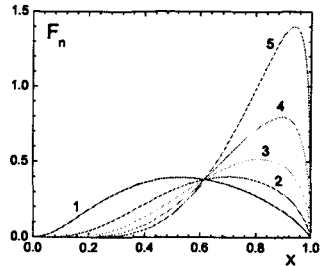


Рисунок 4: Поведение точной подинтегральной функции при разных значениях n (цифры у кривых) и $t = 0.01$.

имеет вид

$$a_n^{as}(1) = c^{n \ln(n/6) - n - 10/3} \sqrt{\frac{\pi n}{2}} (1 + O(1/n)).$$

из которого, если воспользоваться тем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{n!} = 1,$$

следует выражение, показывающее факториальный рост коэффициентов a_n . Обобщенное на случай $t < 1$ оно имеет вид [3]:

$$a_n^{as}(t) \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^n e^{-\frac{10}{3}n} \frac{1}{t^2}, \quad t \leq 1, \quad n \gg 1. \quad (5)$$

В работе [4] для коэффициентов a_n , также используя метод седловой точки, но вблизи точки $x = 0$, получена следующая оценка, которую мы обозначим как c_n^{as} :

$$c_n^{as}(t) \simeq \left(-\frac{2}{3}\right)^n e^{\frac{5}{6}n} n! \sqrt{t}. \quad (6)$$

В наших исследованиях, не используя метод седловой точки, мы найдем поведение коэффициентов a_n при больших и малых n и проведем сравнение с выражениями (5) и (6).

3. Вычисление коэффициента a_n^{as}

Если ориентироваться на изучение поведения $a_n(t)$ в разложении (1) при больших n (высокие порядки), то основной вклад в интеграл (2) будет вносить область больших x . Тогда для функции (3) можно воспользоваться приближением (см. [3])

$$f^{as}(x, t) = \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \ln(t) + \frac{1}{3} \ln(1-x) \quad (7)$$

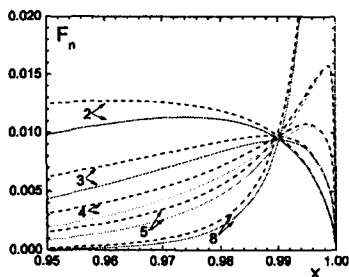


Рисунок 5: Сравнение точной подинтегральной функции (сплошные линии) с приближенной (8) (пунктирные) при значениях x близких к 1 для разных n (цифры у кривых) и $t = 1$.

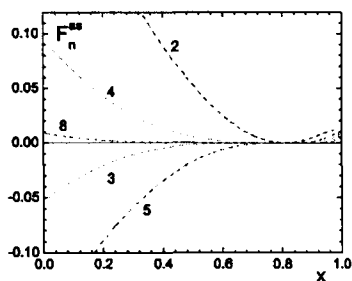


Рисунок 6: Поведение приближенной функции (8) для разных значений n (цифры у кривых) и $t = 1$ при любых x .

и подинтегральная функция в (2) примет вид

$$F_n^{as}(x, t) = \frac{1}{3^n} (1-x) \left[-\frac{5}{3} - \ln(t) - \ln(1-x) \right]^n. \quad (8)$$

На рисунке 5 изображено поведение точной $F_n(x, 1)$ и приближенной $F_n^{as}(x, 1)$ при $n = 2, 3, 4, 6$ и 8 и значениях x близких к 1. Как видно из этого рисунка с ростом n поведение точной и приближенной функций вблизи 1 становится всё более и более близким.

Рисунок 6 демонстрирует поведение приближенной функции $F_n^{as}(x, 1)$ для всей области интегрирования по x . Из этого рисунка видно, что при малых x приближенная функция растет, кроме того при нечетных n она становится отрицательной, тогда как точная функция $F_n(x)$ (см. рисунок 3) всегда положительная и стремится к нулю при $x \rightarrow 0$. Сравнение поведений $F_n^{as}(x)$ и $F_n(x)$, показывает, что сближение функций происходит после прохождения точки (x_0) , в которой F_n^{as} обратится в ноль. Такое поведение позволяет предположить, что при использовании F_n^{as} хорошее приближение для интеграла (2) мы получим, если поменяем нижний предел интегрирования на x_0 , тем самым уберём область, в которой F_n^{as} заведомо имеет неправильное поведение. Соответствующее приближение для $a_n(t)$, которое мы выделять тильдой над величиной, после замены переменной $x = 1 - e^{-u}$, примет вид

$$\tilde{a}_n^{as}(t) = \frac{1}{3^n} \int_{\frac{5}{3}}^{\infty} \left[-\frac{5}{3} - \ln(t) + u \right]^n e^{-2u} du. \quad (9)$$

Обозначив выражение в квадратных скобках через y , приходим к выражению

$$\tilde{a}_n^{as}(t) = e^{-\frac{10}{3}t} t^{-2} \frac{1}{3^n} \int_{-\ln(t)}^{\infty} y^n e^{-2y} dy, \quad (10)$$

интеграл в котором вычисляется точно

$$\int_z^{\infty} y^n e^{-2y} dy = 2^{-1-n} \Gamma(1+n, 2z). \quad (11)$$

Таблица 2: Значения коэффициентов $a_n^{as}(t)$ и $\tilde{a}_n^{as}(t)$, согласно выражениям (5) и (12), соответственно, при $t = 0.01$. Значение b_n рассчитано по формуле (28) с использованием выражения (39).

n	a_n^{exact}	a_n^{as}	\tilde{a}_n^{as}	b_n
1	0.2483	29.73	0.03035	0.2104
2	0.2173	9.909	0.05215	0.1966
3	0.2358	4.955	0.09059	0.2199
4	0.2934	3.303	0.15943	0.2785
5	0.4051	2.753	0.28490	0.3893
6	0.6097	2.753	0.51828	0.5911
7	0.9899	3.211	0.96291	0.9661
8	1.7217	4.282	1.8338	1.6891
9	3.1934	6.423	3.5949	3.1460
10	6.2972	10.701	7.2874	6.2242
11	13.173	19.625	15.350	13.055
12	29.185	39.250	33.752	28.984
13	68.394	85.042	77.818	68.036
14	169.35	198.43	188.77	168.69
15	442.61	496.08	482.97	441.32
16	1219.6	1322.9	1304.9	1217.0
17	3539.1	3748	3723.2	3533.7
18	10802	11245	11210	10790
19	34628	35608	35558	34601
20	$1.1643 \cdot 10^5$	$1.1869 \cdot 10^5$	$1.1862 \cdot 10^5$	$1.1637 \cdot 10^5$
30	$2.1393 \cdot 10^{11}$	$2.1402 \cdot 10^{11}$	$2.1402 \cdot 10^{11}$	$2.1393 \cdot 10^{11}$
50	$6.7117 \cdot 10^{27}$	$6.7117 \cdot 10^{27}$	$6.7117 \cdot 10^{27}$	$6.7117 \cdot 10^{27}$

Воспользовавшись этим выражением и полагая $z = -\ln(t)$, получаем

$$\tilde{a}_n^{as}(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{10}{3}} \left(\frac{1}{6}\right)^n \frac{1}{t^2} \Gamma(1+n, -2\ln(t)). \quad (12)$$

Поскольку для Γ -функции при $n \gg 1$ справедливо

$$\Gamma(1+n, 2z) \sim n! - \frac{2^{n+1} z^{n+1} e^{-2z}}{n},$$

то из (12) следует выражение (5), которое, как отмечалось выше, впервые было получено, используя метод седловой точки, в работе [3].

В таблице 2 и 3 приведены точные значения коэффициентов a_n^{exact} , полученные путем численного интегрирования (2), и приближенные значения, полученные используя выражения (5) и (12), соответственно a_n^{as} и \tilde{a}_n^{as} . В таблице 2 значения коэффициентов даны для отношения масс $m_i/m_L = 10$ ($t = 0.01$), а в таблице 3 для отношения $m_i/m_L = 207$ ($t = t_2$). Последний столбец в таблице 2 демонстрирует улучшенный результат, к получению которого мы перейдем в следующем разделе. Как следует из этих таблиц, значения \tilde{a}_n^{as} ближе к точному, чем a_n^{as} .

То, что \tilde{a}_n^{as} дает улучшенный результат можно увидеть и из таблицы 4, в которой приведены значения $n^*(t)$, начиная с которых асимптотические выражения

Таблица 3: Сравнение значений коэффициентов $a_n^{as}(t)$ и $\tilde{a}_n^{as}(t)$ при использовании выражений (5) и (12), соответственно, для вклада от n электронных петель в аномальный магнитный момент мюона ($t = t_2$).

n	$a_n^{exact}(t_2)$	$a_n^{as}(t_2)$	$\tilde{a}_n^{as}(t_2)$
1	1.0946	$5.4582 \cdot 10^6$	0.06639
2	2.7203	$1.8194 \cdot 10^6$	0.24757
3	7.2292	$9.0971 \cdot 10^5$	0.92525
4	20.164	$6.0647 \cdot 10^5$	3.4662
5	58.463	$5.0539 \cdot 10^5$	13.018
6	175.14	$5.0539 \cdot 10^5$	49.031
7	539.92	$5.8962 \cdot 10^5$	185.24
8	1708.1	$7.8616 \cdot 10^5$	702.17
9	5533.9	$1.1792 \cdot 10^6$	2671.4
10	18333	$1.9654 \cdot 10^6$	10205
11	62039	$3.6033 \cdot 10^6$	39160
12	$2.1426 \cdot 10^5$	$7.2065 \cdot 10^6$	$1.5103 \cdot 10^5$
13	$7.5486 \cdot 10^5$	$1.5614 \cdot 10^7$	$5.8573 \cdot 10^5$
14	$2.7119 \cdot 10^6$	$3.6433 \cdot 10^7$	$2.2856 \cdot 10^6$
15	$9.9330 \cdot 10^6$	$9.1082 \cdot 10^7$	$8.9811 \cdot 10^6$
16	$3.7094 \cdot 10^7$	$2.4289 \cdot 10^8$	$3.5564 \cdot 10^7$
17	$1.4125 \cdot 10^8$	$6.8818 \cdot 10^8$	$1.4206 \cdot 10^8$
18	$5.4855 \cdot 10^8$	$2.0645 \cdot 10^9$	$5.7296 \cdot 10^8$
19	$2.1735 \cdot 10^9$	$6.5377 \cdot 10^9$	$2.3363 \cdot 10^9$
20	$8.7906 \cdot 10^9$	$2.1792 \cdot 10^{10}$	$9.6436 \cdot 10^9$
30	$3.6339 \cdot 10^{16}$	$3.9293 \cdot 10^{16}$	$3.8158 \cdot 10^{16}$
50	$1.2322 \cdot 10^{33}$	$1.2323 \cdot 10^{33}$	$1.2323 \cdot 10^{33}$

Таблица 4: Порядок $n^*(t)$, начиная с которого асимптотические выражения (5) и (12) обеспечивают точность $< 10\%$.

Формула и ссылка	$n^*(t_1)$	$n^*(t_2)$	$n^*(t_3)$
(5) [3]	16	30	42
(12) [наше]	7	15	23

(5) и (12) обеспечивают относительную точность $< 10\%$. Как видно из этой таблицы, с уменьшением t формулу (5) можно применять только при очень больших n и промежуточная область небольших значений n оказывается не охваченной. Выражение (12) дает улучшенный результат, однако область небольших n она также не охватывает. Ниже мы рассмотрим метод получения значительно более точных значений, чем дает формула (12) (см., например, \tilde{b}_n в таблице 2). На необходимость уточнения приближенной функции (7) указывает то, что она обращается в нуль, только если $t > e^{-\frac{5}{3}} \simeq 0.19$, поэтому для рассматриваемых физических значений t (см. таблицу 1), всегда имеющийся при $t = 1$ нуль у функции (7) исчезает.

4. Вычисление коэффициентов b_n

Зададимся целью получить более точные выражения для коэффициентов разложения в (1), чем дает формула (12). Для этого используем приближение (см., например, работу [4]), уточняющее поведение функции $f(x, t)$ в интеграле (2):

$$\tilde{f}(x, t) = \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \ln t - \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x^2}{1-x} \right), \quad x \neq 0. \quad (13)$$

Коэффициенты разложения в этом случае обозначим как b_n , т.е.

$$\alpha_l(t) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{n+1}, \quad (14)$$

где

$$b_n(t) = \int_0^1 (1-x) \left[-\frac{5}{9} - \frac{1}{3} \ln t + \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x^2}{1-x} \right) \right]^n dx. \quad (15)$$

Интеграл (15), в принципе, может быть вычислен точно. Для n от 1 до 6 соответствующие выражения приводятся в Приложении А. При больших значениях $n > 15$ получение аналитических выражений на обычном компьютере, например, с помощью пакета "Mathematica" становится проблематичным. Эту трудность можно легко обойти, если, следуя работе [4], воспользоваться преобразованием Бореля и представить коэффициенты b_n в виде

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k G_{n-k} b_k. \quad (16)$$

Здесь C_{n-1}^k есть биномиальные коэффициенты,

$$G_n = \frac{(-1)^n}{3^n} (n-1)! \left[(-1)^{n-1} + \frac{1}{2^n} + 1 + \zeta(n) [(-1)^n + 2^n - 1] \right], \quad n \geq 2, \quad (17)$$

$$G_1 = -\frac{1}{3} \ln t - \frac{25}{18}, \quad b_0 = \frac{1}{2}. \quad (18)$$

Используя (16), мы легко получаем ответ до $n = 25$ (в принципе можно для любых n).

5. Вычисление коэффициента $\tilde{b}_n(\delta)$

Сравним поведение точной функции $f(x, t)$ и приближенной $\tilde{f}(x, t)$ при малых x . Как следует из выражения (13), появление под логарифмом x^2 приводит к тому, что у функции $\tilde{f}(x, t)$ появляется полюс в точке $x = 0$, тогда, как исходная функция $f(x, t)$ стремится к нулю при $x \rightarrow 0$. На рисунке 7 для $t = t_1$ и на рисунке 8 для $t = t_2$ показано поведение приближенной $\tilde{f}(x, t)$ и точной $f(x, t)$ функций, определяемых выражениями (13) и (3), соответственно. На этих рисунках приводится также поведение этих функций при возведении их в степень, которая указана цифрой у кривых. Как видно из этих рисунков, точная и приближенная функции сближаются

после прохождения точки, в которой $\tilde{f} = 0$. Обозначим эту точку через δ и запишем для нее уравнение

$$-\frac{5}{3} - \ln t + \ln \left[\frac{\delta^2}{1 - \delta} \right] = 0, \quad (19)$$

решая которое находим

$$\delta(t) = \frac{1}{2} \sqrt{(\gamma t)^2 + 4\gamma t} - \frac{1}{2} \gamma t, \quad \gamma = e^{\frac{5}{3}}. \quad (20)$$

Из этого выражения следует, что при малых t независимо от n можно записать

$$\delta \approx \sqrt{\gamma t} - \frac{1}{2} \gamma t + O\left(t^{\frac{3}{2}}\right). \quad (21)$$

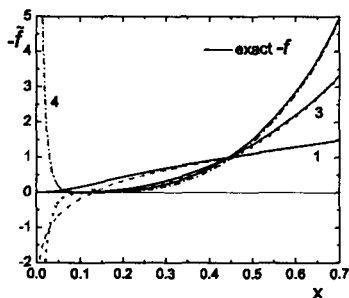


Рисунок 7: Сравнение поведения функций $\tilde{f}(x, t)$ и $f(x, t)$ (цифра у кривых 1) и при возведении этих функций в степень 3 и 4 (цифры у кривых) для $t = t_1$.

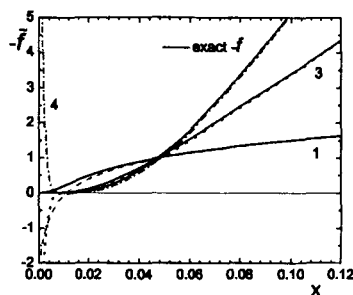


Рисунок 8: Сравнение поведения функций $\tilde{f}(x, t)$ и $f(x, t)$ (цифра у кривых 1) и при возведении этих функций в степень 3 и 4 (цифры у кривых) для $t = t_2$.

В таблице 5 приведены численные значения δ при рассматриваемых нами значениях t . Как видно из этой таблицы, физическим значениям t соответствуют небольшие значения δ , что позволит нам в дальнейшем воспользоваться разложением по δ .

Таблица 5: Точка обращения функции $\tilde{f}(x, t)$ в ноль в зависимости от t .

t	1	$1 \cdot 10^{-2}$	t_1	t_2	t_3
$\delta(t)$	0.860	0.20514	0.1278	0.011542	0.0006615

Обозначим как \tilde{b}_n коэффициенты, определяемые интегралом (15), если нижний предел интегрирования заменяется на δ

$$\tilde{b}_n(\delta) = \frac{1}{3^n} \int_{\delta}^1 (1-x) \left[-\frac{5}{3} - \ln t + \ln \left(\frac{x^2}{1-x} \right) \right]^n dx. \quad (22)$$

Прямым интегрированием нетрудно получить выражения для $b_n(\delta)$ при небольших значениях n . Как например, в Приложении Б приведены первые три коэффициента. С ростом n выражения для $\tilde{b}_n(\delta)$ становятся все более и более громоздкими. Понятно, что путь прямого интегрирования становится не пригодным для $n \gg 1$. Тогда, как и при нахождении коэффициентов b_n , которые далее мы обозначаем как $b_n^{(0)}$, поскольку $\tilde{b}_n(\delta = 0)$ переходит в b_n , воспользуемся техникой преобразования Бореля и представим выражение для нахождения \tilde{b}_n в виде

$$B(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \tilde{b}_n k^n. \quad (23)$$

Подставляя (22) в (23) и суммируя по n , получаем

$$B(k) = e^{k\beta} \int_{\delta}^1 \frac{x^{2k}}{(1-x)^{k-1}} dx. \quad (24)$$

Здесь

$$\beta = -\frac{5}{3} - \ln t. \quad (25)$$

Содержащийся в (24) интеграл вычисляется точно:

$$\int_{\delta}^1 \frac{x^{2k}}{(1-x)^{k-1}} dx = \frac{\Gamma(1+2k)\Gamma(2-k)}{\Gamma(3+k)} - \frac{\delta^{1+2k} {}_2F_1(-1+k, 1+2k; 2(1+k); \delta)}{1+2k}. \quad (26)$$

Тогда

$$B(k) = e^{k\beta} \left[\frac{\Gamma(1+2k)\Gamma(2-k)}{\Gamma(3+k)} - \frac{\delta^{1+2k} {}_2F_1(-1+k, 1+2k; 2(1+k); \delta)}{1+2k} \right]. \quad (27)$$

Дифференцируя это выражение по k и полагая $k = 0$, получаем выражение для \tilde{b}_n в виде

$$\tilde{b}_n(t) = b_n^{(0)}(t) - \Delta b_n(t), \quad (28)$$

где $\Delta b_n(t)$ определяется выражением

$$\Delta b_n(t) = \frac{1}{3^n} \varphi^{(n)}(k, \delta(t)) \Big|_{k=0}. \quad (29)$$

Верхний индекс (n) у φ -функции означает n -ую производную по k , сама функция определяется выражением

$$\varphi(k, \delta) = e^{k\beta} \frac{{}_2F_1(-1+k, 1+2k; 2(1+k); \delta)}{1+2k} \delta^{1+2k}. \quad (30)$$

Найти n -ую производную $\varphi(k, \delta)$ в явном виде не удастся. Однако, учитывая, что при интересующих нас значениях l_1, l_2 и l_3 , по величине δ мало (см. таблицу 5), то функцию (30) можно разложить в ряд по степеням δ и для первых двух слагаемых написать

$$\varphi_2(k, \delta) = e^{k\beta} \left[\frac{1}{1+2k} + \frac{k-1}{2(1+k)} \delta \right] \delta^{1+2k}. \quad (31)$$

Дифференцируя по k и полагая $k = 0$, получаем

$$\varphi_2^{(n)}(k, \delta)|_{k=0} = (-1)^n \left[2^n \Gamma \left(1 + n, -\frac{z}{2} \right) \delta e^{-\frac{z}{2}} - \Gamma(1 + n, -z) \delta^2 e^{-z} \right] + \frac{1}{2} z^n \delta^2, \quad (32)$$

где

$$z = 2 \ln \delta - \ln(\gamma t) = \ln(1 - \delta). \quad (33)$$

Выражение (32), с учетом следующих из (33) соотношений $\delta e^{-\frac{z}{2}} = \sqrt{\gamma t}$ и $\delta^2 e^{-z} = \gamma t$, принимает вид

$$\varphi_2^{(n)}(k, \delta)|_{k=0} = (-1)^n \left[2^n \Gamma \left(1 + n, -\frac{z}{2} \right) \sqrt{\gamma t} - \Gamma(1 + n, -z) \gamma t \right] + \frac{1}{2} z^n \delta^2. \quad (34)$$

Если воспользоваться разложением Γ -функции при малых z , поскольку $z \simeq -\sqrt{\gamma t}$, то получаем

$$\varphi_2^{(n)}(t) = (-1)^n (2^n \sqrt{\gamma t} - \gamma t) n! + O((\gamma t)^{\frac{3}{2}+1}). \quad (35)$$

Подставляя это выражение в (29) и учитывая, что $\gamma = e^{\frac{2}{3}}$, для $\tilde{b}_n(t)$ находим

$$\tilde{b}_n(t) = b_n^{(0)} - (-1)^n \left[\left(\frac{2}{3} \right)^n e^{\frac{2}{3}} \sqrt{t} - \frac{1}{3^n} e^{\frac{2}{3}} t \right] n! + O((\gamma t)^{\frac{3}{2}+1}). \quad (36)$$

Отметим, что степени $(\gamma t)^{\frac{3}{2}+1}$ соответствуют уже следующим членам разложения функции (30) в ряд по δ (см. выражения (38) и (39) ниже), поэтому ими можно пренебречь. Легко видеть, что первое слагаемое в квадратных скобках совпадает с выражением для c_n , определенным в (6). Пренебрегая вторым слагаемым в квадратных скобках в (36), можно записать

$$\tilde{b}_n \simeq b_n^{(0)} - (-1)^n \left(\frac{2}{3} \right)^n e^{\frac{2}{3}} \sqrt{t}. \quad (37)$$

В работе [4] выражение для c_n (6) интерпретировалось как асимптотическая оценка коэффициента $b_n^{(0)}$. Как следует из (37), c_n является только частью коэффициента разложения по степеням (α/π) в (14). С ростом n начнет проявляться вклад слагаемого, пропорционального t , содержащегося в (36). Учет этого слагаемого позволяет продвинуться в область больших n . Проиллюстрируем это примером расчета для $t = 0.01$ (см. аналогичную таблицу 2 в работе [4]).

В таблице 6 приведены численные значения a_n^{exact} , $\tilde{b}_n = b_n^{(0)} - \Delta b_n$, $b_n^{(0)}$, c_n и $b_n^{(0)} - c_n$ при $t = 0.01$. При вычислении \tilde{b}_n использовалось выражение (36), $b_n^{(0)}$ вычислялся с использованием преобразования Бореля по рекуррентному соотношению (16), c_n — по формуле (6). Как видно из этой таблицы, значения, соответствующие разности $b_n^{(0)} - c_n$ оказываются положительными и близкими к a_n^{exact} вплоть до $n = 9$, тогда как по отдельности для $b_n^{(0)}$ и c_n согласия с точным значением нет, однако они близки друг к другу, что как бы указывает, что c_n хорошо аппроксимирует b_n . Проявление слагаемого, пропорционального t в (36), начинается с $n = 10$. С ростом n растет, как само значение $b_n^{(0)}$, так и поправки Δb_n и c_n , и наблюдается эффект сокращения, который проявляется тем сильнее, чем больше n . Например, при оценке коэффициента для $n = 20$ этот эффект составляет 7 порядков для разности $b_n^{(0)} - c_n$ и 9 порядков для $b_n^{(0)} - \Delta b_n$. Это указывает на то, что вычисление коэффициентов высоких порядков таким методом потребует высокой точности расчета, например, при оценке коэффициента для $n = 20$, несмотря на то, что сам коэффициент не маленькое число, точность вычисления должна быть лучше, чем 10^{-10} . При больших

Таблица 6: Численные значения коэффициентов разложения в (14) при $t = 0.01$, полученные с использованием формулы (36) при вычислении \tilde{b}_n , рекуррентного соотношения (16) для $b_n^{(0)}$ и формулы (6) для c_n

n	a_n^{exact}	\tilde{b}_n	$b_n^{(0)}$	c_n	$b_n^{(0)} - c_n$
1	0.2483	0.2134	0.0731	-0.1534	0.2266
2	0.2173	0.1973	0.3901	0.2045	0.1856
3	0.2358	0.2194	-0.1779	-0.4091	0.2312
4	0.2934	0.2790	1.3542	1.0908	0.2633
5	0.4051	0.3889	-3.2211	-3.6361	0.4150
6	0.6097	0.5918	15.084	14.544	0.5395
7	0.9899	0.9652	-66.797	-67.874	1.087
8	1.7217	1.691	363.4	362.0	1.366
9	3.1934	3.1424	$-2.1679 \cdot 10^3$	$-2.1720 \cdot 10^3$	4.119
10	6.2972	6.2323	$1.4483 \cdot 10^4$	$1.4477 \cdot 10^4$	2.979
11	13.173	13.035	$-1.06160 \cdot 10^5$	$-1.06173 \cdot 10^5$	24.97
12	29.185	29.036	$8.4946 \cdot 10^5$	$8.4943 \cdot 10^5$	-18.68
13	68.394	67.88	$-7.3620 \cdot 10^6$	$-7.3620 \cdot 10^6$	274.7
14	169.35	169.15	$6.8713 \cdot 10^7$	$6.8713 \cdot 10^7$	-795.9
15	442.61	439.8	$-6.8713 \cdot 10^8$	$-6.8713 \cdot 10^8$	$5.265 \cdot 10^3$
16	1219.6	1222.8	$7.3294 \cdot 10^8$	$7.3294 \cdot 10^8$	$-2.451 \cdot 10^4$
17	3539.1	3505.2	$-8.3070 \cdot 10^{10}$	$-8.3070 \cdot 10^{10}$	$1.494 \cdot 10^5$
18	10802	10949	$9.9680 \cdot 10^{11}$	$9.9680 \cdot 10^{11}$	$-8.641 \cdot 10^5$
19	34628	34242	$-1.2626 \cdot 10^{13}$	$-1.2626 \cdot 10^{13}$	$5.576 \cdot 10^6$
20	$1.164 \cdot 10^5$	$1.179 \cdot 10^5$	$1.6835 \cdot 10^{14}$	$1.6835 \cdot 10^{14}$	$-3.682 \cdot 10^7$

n потребуется также учесть и следующие члены разложения по t ($t^{\frac{3}{2}}$ и так далее). Трудоемких расчетов можно избежать, поскольку при больших n ($n \gtrsim 30$) начинает хорошо работать формула (5), показывающая что разность $b_n^{(0)} - \Delta b_n$ ведет себя как $\frac{1}{t^2}$.

Результаты расчета, аналогичные представленным в таблице 6, но при физических значениях t , приведены в Приложении В: таблицы 9, 10 и 11 для t_1 , t_2 и t_3 , соответственно. В таблице 7, используя численные значения из этих таблиц приведена относительная точность $\varepsilon(b) = (a^{exact} - b)/a^{exact}$ (%) для коэффициентов $\tilde{b}_n(t)$ и $b_n^{(0)}(t)$. Как видно из этой таблицы для $b_n^{(0)}(t)$ при t_1 формулы (40)-(40) не дают хорошего результата, однако эти формулы обеспечивают точность $< 1\%$ и $< 0.03\%$ при t_2 и t_3 , соответственно. Учет слагаемого $\Delta b_n(t)$, т.е. использование выражения (36) для $\tilde{b}_n(t)$ существенно улучшает точность при t_2 и t_3 и позволяет достичь точности в несколько процентов при t_1 . Отметим, что ухудшение точности для $\tilde{b}_{30}(t_1)$ указывает на необходимость учета следующего порядка разложения по δ . Действительно, при учете следующего порядка δ^3 вместо -0.63% мы получаем 0.0003% . Поясним, как строится следующий порядок разложения по δ . Разлагая φ -функции (30) по δ до третьего порядка, получаем

$$\varphi_3(k, \delta) = e^{k\beta} \left[\frac{1}{1+2k} + \frac{(-1+k)}{2(1+k)} \delta + \frac{(-1+k)k}{2(3+2k)} \delta^2 \right] \delta^{1+2k}. \quad (38)$$

Таблица 7: Относительная точность ε при использовании выражений (36) и (16) для \tilde{b}_n и $b_n^{(0)}$, соответственно, при физических отношениях масс лептонов.

n	$\varepsilon(t_1)$ (%)		$\varepsilon(t_2)$ (%)		$\varepsilon(t_3)$ (%)	
	для b_n	для $b_n^{(0)}$	для b_n	для $b_n^{(0)}$	для b_n	для $b_n^{(0)}$
1	8.317	31.9	0.3765	1.05	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$3.5 \cdot 10^{-2}$
2	4.840	24.3	0.1606	-0.20	$3.8 \cdot 10^{-3}$	$-3.1 \cdot 10^{-3}$
3	3.388	48.3	0.0921	0.37	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$4.8 \cdot 10^{-3}$
4	2.493	79.4	0.0612	-0.20	$8.7 \cdot 10^{-4}$	$-1.0 \cdot 10^{-3}$
5	1.944	173	0.0449	0.34	$5.4 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$
6	1.523		0.0340	-0.37	$3.7 \cdot 10^{-4}$	$-8.1 \cdot 10^{-4}$
7	1.228		0.0270	0.63	$2.7 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$
8	0.979		0.0221	-1.0	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$-1.1 \cdot 10^{-3}$
9	0.797		0.0183	1.9	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$
10	0.631		0.0155	-3.8	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$-2.0 \cdot 10^{-3}$
11	0.515		0.0131	8.3	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$3.3 \cdot 10^{-3}$
12	0.400		0.0113	-19	$9.7 \cdot 10^{-5}$	$-5.0 \cdot 10^{-3}$
13	0.327		0.0100	47	$8.4 \cdot 10^{-5}$	$8.8 \cdot 10^{-3}$
14	0.241		0.0083	-122	$7.3 \cdot 10^{-5}$	$-1.6 \cdot 10^{-2}$
15	0.203		0.0073		$6.4 \cdot 10^{-5}$	$3.1 \cdot 10^{-2}$
16	0.133		0.0062		$5.7 \cdot 10^{-5}$	$-6.2 \cdot 10^{-2}$
17	0.127		0.0053		$5.0 \cdot 10^{-5}$	0.13
18	0.060		0.0046		$4.5 \cdot 10^{-5}$	-0.3
19	0.089		0.0039		$4.0 \cdot 10^{-5}$	0.71
20	0.007		0.0033		$3.6 \cdot 10^{-5}$	-1.74
30	-0.63		0.00041		$1.1 \cdot 10^{-5}$	$-8.6 \cdot 10^4$

Таблица 8: Порядок $n^*(t)$, начиная с которого формула (36) обеспечивает точность ε .

ε (%)	$n^*(t_1)$	$n^*(t_2)$	$n^*(t_3)$
< 10	1		
< 1	8	1	1
< 0.1	18	3	2
< 0.01	20	13	2

Из этого выражения находим

$$\varphi_3^{(n)}(k, t)|_{k=0} = \varphi_2^{(n)}(k, t)|_{k=0} + (-1)^n \frac{5}{8} \left(\frac{2}{3}\right)^n \Gamma\left(1+n, -\frac{3z}{2}\right) (\gamma t)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{5z^n}{8} - \frac{z^{n-1}}{4} n\right) \delta^3, \quad (39)$$

где $\varphi_2^{(n)}(k, t)|_{k=0}$ задано (34), а δ и z , формулами (20) и (33), соответственно. Подставляя (39) в формулу (29), получаем $\Delta b_n(t)$ соответствующую δ^3 .

В таблице 8 приведены значения n^* , начиная с которых выражение (36), полученное при разложении до δ^2 обеспечивает заданную относительную точность ε (%).

6. Заключение

Исследованы вклады в аномальные магнитные моменты лептонов от диаграмм поляризации вакуума замкнутыми лептонными петлями в высших порядках разложения по постоянной тонкой структуры в том случае, когда лептонные петли образованы одинаковыми лептонами с массой меньшей, чем масса исходного лептона ($t < 1$). Для коэффициентов разложения $a_n(t)$ получено два взаимно дополняющих выражения, имеющих различное как функция t поведение, но при больших $n \gg 2 \ln t$ дающие один и тот же результат.

А) Поведение коэффициентов разложения при больших n описывается выражением

$$\tilde{a}_n(t) \sim e^{-\frac{10}{3}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^n \frac{1}{t^2} \Gamma(1+n, -2 \ln t) \quad t \leq 1, \quad n \gg 1.$$

Значения n^* , начиная с которых это выражение обеспечивает точность не хуже 10 % приведены в таблице 4, из которой видно, что эта формула работает лучше, чем при замене Γ функции на $n!$. Если такую замену сделать, то воспроизводится результат работы [3].

Б) Начиная с $n \geq 1$ коэффициенты разложения аппроксимируются формулой

$$\tilde{b}_n(t) \simeq b_n^{(0)}(t) - (-1)^n \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n e^{\frac{5}{3}\sqrt{t}} - \frac{1}{3^n} e^{\frac{5}{3}t} \right] n!, \quad t \text{ мало, } n \text{ любое,}$$

где численные значения $b_n^{(0)}(t)$ находятся по рекуррентному соотношению с помощью преобразования Бореля, как это было описано в работе [4]. В таблице 8 приведены n^* , начиная с которых достигается требуемая относительная точность $\varepsilon(\%)$. Все приведенные в таблице 1 для t_1 , t_2 и t_3 значения могут быть получены, используя выражение для $\tilde{b}_n(t)$.

При больших $n \gg -2 \ln t$ оценка коэффициентов разложения $a_n(t)$ с использованием выражения $\tilde{b}_n(t)$ в виде разложения по степеням $(\gamma t)^{\frac{5}{3}}$ потребует учета большого числа членов разложения. Эту трудность легко обойти, поскольку в этом случае можно воспользоваться выражением для $\tilde{a}_n(t)$. Так например, если при $n = 25$ отличие между $\tilde{a}_n(t_2)$ и $\tilde{b}_n(t_2)$ составляет $\sim 10\%$, то для $n > 25$ оно уже менее 1%.

Точность коэффициентов \tilde{b}_n может быть улучшена, если учесть следующие слагаемые в разложении функции (30) в ряд по δ . Расчеты показали, что для рассматриваемых физических значений отношения масс лептонов ($t < 1$) при сохранении четырех значащих цифр, отличий между использованием разложения по δ до второго порядка и до третьего, соответственно, применением выражений (31) и (38), нет.

Результаты могут быть использованы для проверки численных расчетов в высших порядках и оценки вкладов высших порядков. Наибольший практический интерес представляют приведенные в Приложении А новые формулы для оценки вкладов от 5 и 6 лептонных петель, $\tilde{b}_5(t)$ и $\tilde{b}_6(t)$, соответственно.

Благодарности

Выражаем искреннюю благодарность профессору В. И. Кувшинове и всем членам Оргкомитета Международного семинара "NPCS-2020" за проведение семинара и поддержку творческой атмосферы во время его работы.

Приложение А: Аналитические выражение для $b_n^{(0)}(t)$ и $\tilde{b}_n(t)$ при $n = 1, \dots, 6$

Точные аналитические выражения для первых 6 коэффициентов $b_n^{(0)}(t)$, определяемых интегралом (15) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 b_1^{(0)}(t) &= -\frac{1}{6} \ln t - \frac{25}{36}, \\
 b_2^{(0)}(t) &= \frac{1}{18} \ln^2 t + \frac{25}{54} \ln t + \frac{317}{324} + \frac{1}{27} \pi^2, \\
 b_3^{(0)}(t) &= -\frac{1}{54} \ln^3 t - \frac{25}{108} \ln^2 t - \left(\frac{317}{324} + \frac{1}{27} \pi^2 \right) \ln t - \frac{8609}{5832} - \frac{25}{162} \pi^2 - \frac{2}{9} \zeta(3), \\
 b_4^{(0)}(t) &= \frac{1}{162} \ln^4 t + \frac{25}{243} \ln^3 t + \left(\frac{317}{486} + \frac{2}{81} \pi^2 \right) \ln^2 t + \left(\frac{8609}{4374} + \frac{50}{243} \pi^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{8}{27} \zeta(3) \right) \ln t + \frac{64613}{26244} + \frac{317}{729} \pi^2 + \frac{2}{135} \pi^4 + \frac{100}{81} \zeta(3), \\
 b_5^{(0)}(t) &= -\frac{1}{486} \ln^5 t - \frac{125}{2916} \ln^4 t - \left(\frac{1585}{4374} + \frac{10}{729} \pi^2 \right) \ln^3 t \\
 &\quad - \left(\frac{43045}{26244} + \frac{125}{729} \pi^2 + \frac{20}{81} \zeta(3) \right) \ln^2 t - \left(\frac{323065}{78732} + \frac{1585}{2187} \pi^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{81} \pi^4 + \frac{500}{243} \zeta(3) \right) \ln t - \frac{2182775}{472392} - \frac{43045}{39366} \pi^2 - \frac{25}{243} \pi^4 \\
 &\quad - \frac{3170}{729} \zeta(3) - \frac{40}{243} \pi^2 \zeta(3) - \frac{40}{27} \zeta(5), \\
 b_6^{(0)}(t) &= \frac{1}{1458} \ln^6 t + \frac{25}{1458} \ln^5 t + \left(\frac{1585}{8748} + \frac{5}{729} \pi^2 \right) \ln^4 t \\
 &\quad + \left(\frac{43045}{39366} + \frac{250}{2187} \pi^2 + \frac{40}{243} \zeta(3) \right) \ln^3 t + \left(\frac{323065}{78732} + \frac{1585}{2187} \pi^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{81} \pi^4 + \frac{500}{243} \zeta(3) \right) \ln^2 t + \left(\frac{2182775}{236196} + \frac{43045}{19683} \pi^2 + \frac{50}{243} \pi^4 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{80}{243} \pi^2 \zeta(3) + \frac{6340}{729} \zeta(3) + \frac{80}{27} \zeta(5) \right) \ln t + \frac{41776915}{4251528} + \frac{323065}{118098} \pi^2 \\
 &\quad + \frac{317}{729} \pi^4 + \frac{244}{15309} \pi^6 + \frac{86090}{6561} \zeta(3) + \frac{80}{81} \zeta^2(3) + \frac{100}{729} \pi^2 \zeta(3) + \frac{1000}{81} \zeta(5).
 \end{aligned}$$

Эти выражения, кроме случая $n = 6$, который ранее не рассматривался, согласуются с теми, что имеются в литературе, а именно, в работе [4], в которой они были получены впервые с использованием преобразования Бореля, а также с точностью до $O(\sqrt{t})$ с асимптотическими выражениями из работы [8], в которой они были получены с использованием интегралов Меллина-Барнеса [11-13]. Наибольший интерес представляют формулы для $b_5^{(0)}(t)$ и $b_6^{(0)}(t)$, поскольку они войдут в выражения для коэффициентов разложения $\tilde{b}_5(t)$ и $\tilde{b}_6(t)$ (A_2 в.р. и $A_2^{(14)}$ в.р.):

$$\begin{aligned}
 \tilde{b}_5(t) &\simeq b_5^{(0)}(t) + \frac{40}{81} \left(32 e^{\frac{5}{2} \sqrt{t}} - e^{\frac{5}{2} t} \right), \\
 \tilde{b}_6(t) &\simeq b_6^{(0)}(t) + \frac{80}{81} \left(64 e^{\frac{5}{2} \sqrt{t}} - e^{\frac{5}{2} t} \right).
 \end{aligned}$$

Приложение Б: Точные аналитические выражения для \tilde{b}_n при $n = 1, 2, 3$

Прямым интегрированием (22) мы получили следующие три первых выражения для коэффициентов $b_n(\delta)$.

$$\tilde{b}_1(\delta) = -\frac{1}{6}(1 + \delta^2 - 2\delta) \ln t + \frac{19}{18}\delta - \frac{1}{6} \ln(1 - \delta) - \frac{1}{6}\delta(2 - \delta) \\ \times \ln\left(\frac{\delta^2}{1 - \delta}\right) - \frac{13}{36}\delta^2 - \frac{25}{36};$$

$$\tilde{b}_2(\delta) = \frac{1}{18}(1 + \delta^2 - 2\delta) \ln^2 t + \frac{1}{9} \left[\frac{25}{6} + (1 - \delta)^2 \ln(1 - \delta) - \frac{19}{3}\delta \right. \\ \left. + \frac{13}{6}\delta^2 + 4\delta \ln \delta - 2\delta^2 \ln \delta \right] \ln t + \frac{317}{324} - \frac{203}{162}\delta + \frac{89}{324}\delta^2 \\ + \frac{1}{18}(1 - \delta)^2 \ln^2(1 - \delta) + \left[\frac{2}{9}(2 - \delta)\delta \ln \delta + \frac{1}{54}(1 - \delta)(25 - 13\delta) \right] \\ \times \ln(1 - \delta) + \frac{2}{9}(\delta^2 - 2\delta) \ln^2 \delta + \frac{1}{27}(38\delta - 13\delta^2) \ln \delta + \frac{2}{9}\text{Li}_2(1 - \delta),$$

$$\tilde{b}_3(\delta) = \frac{1}{54}(-1 + 2\delta - \delta^2) \ln^3 t - \frac{1}{108} [25 - 38\delta + 13\delta^2 + 6 \ln(1 - \delta) \\ - 12\delta \ln(1 - \delta) + 6\delta^2 \ln(1 - \delta) + 24\delta \ln \delta - 12\delta^2 \ln \delta] \ln^2 t - \frac{1}{324} [317 \\ - 406\delta + 89\delta^2 + 150 \ln(1 - \delta) - 228\delta \ln(1 - \delta) + 78\delta^2 \ln(1 - \delta) \\ + 18 \ln^2(1 - \delta) - 36\delta \ln^2(1 - \delta) + 18\delta^2 \ln^2(1 - \delta) + 456\delta \ln \delta \\ - 156\delta^2 \ln \delta + 144\delta \ln(1 - \delta) \ln \delta - 72\delta^2 \ln(1 - \delta) \ln \delta - 144\delta \ln^2 \delta \\ + 72\delta^2 \ln^2 \delta + 72\text{Li}_2(1 - \delta)] \ln t - \frac{4}{9}\zeta(3) + \left(-\frac{1}{54} + \frac{1}{27}\delta - \frac{1}{54}\delta^2 \right) \\ \times \ln^3(1 - \delta) + \left(-\frac{25}{108} - \frac{2}{9}\delta \ln \delta - \frac{13}{108}\delta^2 + \frac{19}{54}\delta + \frac{1}{9}\delta^2 \ln \delta \right) \ln^2(1 - \delta) \\ + \left[-\frac{317}{324} + \frac{1}{54}(12 - 12\delta^2 + 24\delta) \ln^2 \delta + \frac{1}{54}(26\delta^2 - 76\delta) \ln \delta \right. \\ \left. - \frac{2}{9}\text{Li}_2(1 - \delta) - \frac{89}{324}\delta^2 + \frac{203}{162}\delta \right] \ln(1 - \delta) + \left(-\frac{8}{27}\delta + \frac{4}{27}\delta^2 \right) \ln^3 \delta \\ + \left(\frac{38}{27}\delta - \frac{13}{27}\delta^2 \right) \ln^2 \delta + \left[-\frac{2}{27}\pi^2 + \frac{89}{162}\delta^2 + \frac{4}{9}\text{Li}_2(1 - \delta) - \frac{203}{81} \right] \ln \delta \\ + \frac{4955}{2916}\delta - \frac{25}{27}\text{Li}_2(1 - \delta) + \frac{4}{9}\text{Li}_3(\delta) - \frac{8609}{5832} - \frac{1301}{5832}\delta^2 + \frac{2}{9}\text{Li}_3(1 - \delta).$$

Приложение В: Численные значения коэффициентов при физических значениях $t < 1$

Результаты расчета коэффициентов разложения в пертурбативном ряде (14) при физических значениях t_1, t_2 и t_3 , приведенных в таблице 1.

Таблица 9: Численные значения коэффициентов разложения (14) для вклада n мюонных петель в аномальный магнитный момент тау лептона ($t = t_1$), полученные с использованием формулы (36) при вычислении \tilde{b}_n , рекуррентного соотношения (16) для $b_n^{(0)}$ и формулы (6) для c_n .

n	$a_n^{exact}(t_1)$	b_n	$b_n^{(0)}$	c_n	$b_n^{(0)} - c_n$
1	0.3617	0.3314	0.2464	-0.0912	0.3376
2	0.4029	0.3834	0.5008	0.1216	0.3793
3	0.5321	0.5140	0.2750	-0.2432	0.5182
4	0.7848	0.7652	1.4082	0.6485	0.7597
5	1.2596	1.2351	-0.9174	-2.1618	1.2443
6	2.1690	2.1360	10.765	8.6471	2.1175
7	3.9726	3.9238	-36.386	-40.353	3.9670
8	7.6958	7.6204	222.72	215.22	7.5054
9	15.710	15.585	-1275.4	-1291.3	15.930
10	33.713	33.500	8641.029	8608.67	32.350
11	75.927	75.536	63050.56	-63130.31	79.75
12	179.29	178.60	505204.21	505042.50	161.70
13	443.56	442.11	$-4.37652 \cdot 10^6$	$-4.377035 \cdot 10^6$	515.21
14	1149.4	1146.6	$4.08531 \cdot 10^7$	$4.08523 \cdot 10^7$	805.51
15	3118.6	3112.3	$-4.08518 \cdot 10^8$	$4.08523 \cdot 10^8$	4817.78
16	8858.4	8846.5	$4.3575813 \cdot 10^9$	$4.3575816 \cdot 10^9$	-249.51
17	26335	26301	$-4.9385847 \cdot 10^{10}$	$-4.9385924 \cdot 10^{10}$	778452
18	81911	81860	$5.926309 \cdot 10^{11}$	$5.926311 \cdot 10^{11}$	$-2.27 \cdot 10^5$
19	266429	266192	$-7.50666 \cdot 10^{12}$	$-7.506665 \cdot 10^{12}$	$2.23 \cdot 10^6$
20	$9.05706 \cdot 10^5$	$9.05642 \cdot 10^5$	$1.00089 \cdot 10^{14}$	$1.00089 \cdot 10^{14}$	$-3.68 \cdot 10^7$
25	$7.73019 \cdot 10^8$	$7.71800 \cdot 10^8$	$-8.403308 \cdot 10^{19}$	$-8.403308 \cdot 10^{19}$	$9.70 \cdot 10^{11}$
30	$1.71113 \cdot 10^{12}$	$1.71186 \cdot 10^{12}$	$1.892380 \cdot 10^{26}$	$1.892380 \cdot 10^{26}$	$-6.82 \cdot 10^{18}$

Таблица 10: Численные значения коэффициентов разложения (14) для вклада n электронных петель в аномальный магнитный момент мюона ($t = t_2$), полученные с использованием формулы (36) при вычислении \tilde{b}_n , рекуррентного соотношения (16) для $b_n^{(0)}$ и формулы (6) для c_n .

n	$a_n^{exact}(t_2)$	\tilde{b}_n	$b_n^{(0)}$	c_n	$b_n^{(0)} - c_n$
1	1.095	1.091	1.083	-0.0074	1.0905
2	2.720	2.716	2.726	0.0099	2.7159
3	7.229	7.223	7.203	-0.0198	7.2225
4	20.16	20.15	20.21	0.0527	20.152
5	58.46	58.44	58.26	-0.1757	58.437
6	175.1	175.1	175.8	0.7026	175.08
7	539.9	539.8	536.5	-3.279	539.77
8	1708.1	1707.7	1725.2	17.49	1707.7
9	5533.9	5532.9	5428.0	-104.9	5532.9
10	$1.8333 \cdot 10^4$	$1.8331 \cdot 10^4$	$1.9030 \cdot 10^4$	$0.700 \cdot 10^4$	18331.0
11	$6.2039 \cdot 10^4$	$6.2030 \cdot 10^4$	$5.6901 \cdot 10^4$	$-0.513 \cdot 10^4$	62030.4
12	$2.1426 \cdot 10^5$	$2.1424 \cdot 10^5$	$2.5528 \cdot 10^5$	$0.4104 \cdot 10^5$	214239.6
13	$7.5486 \cdot 10^5$	$7.5479 \cdot 10^5$	$3.9913 \cdot 10^5$	$-3.5566 \cdot 10^5$	$7.548 \cdot 10^5$
14	$2.7119 \cdot 10^6$	$2.7116 \cdot 10^6$	$6.0311 \cdot 10^6$	$3.319 \cdot 10^6$	$2.712 \cdot 10^6$
15	$9.9330 \cdot 10^6$	$9.9323 \cdot 10^6$	$-2.3263 \cdot 10^7$	$-3.320 \cdot 10^7$	$9.932 \cdot 10^6$
16	$3.7094 \cdot 10^7$	$3.7091 \cdot 10^7$	$3.9117 \cdot 10^8$	$3.540 \cdot 10^8$	$3.709 \cdot 10^7$
17	$1.4125 \cdot 10^8$	$1.4124 \cdot 10^8$	$-3.8717 \cdot 10^9$	$-4.013 \cdot 10^9$	$1.412 \cdot 10^8$
18	$5.4854 \cdot 10^8$	$5.4852 \cdot 10^8$	$4.8703 \cdot 10^{10}$	$4.815 \cdot 10^{10}$	$5.485 \cdot 10^8$
19	$2.1735 \cdot 10^9$	$2.1734 \cdot 10^9$	$-6.078 \cdot 10^{11}$	$-6.100 \cdot 10^{11}$	$2.173 \cdot 10^9$
20	$8.7906 \cdot 10^9$	$8.7903 \cdot 10^9$	$8.1416 \cdot 10^{12}$	$8.133 \cdot 10^{12}$	$8.790 \cdot 10^9$
25	$1.3204 \cdot 10^{13}$	$1.3204 \cdot 10^{13}$	$-6.8282 \cdot 10^{18}$	$-6.8282 \cdot 10^{18}$	$1.321 \cdot 10^{13}$
30	$3.6339 \cdot 10^{16}$	$3.6339 \cdot 10^{16}$	$1.5377 \cdot 10^{25}$	$1.5377 \cdot 10^{25}$	$3.618 \cdot 10^{16}$

Таблица 11: Численные значения коэффициентов разложения (14) для вклада n электронных петель в аномальный магнитный момент тау лептона ($t = t_3$), полученные с использованием формулы (36) при вычислении \tilde{b}_n , рекуррентного соотношения (16) для $b_n^{(0)}$ и формулы (6) для c_n .

n	$a_n^{exact}(t_3)$	b_n	$b_n^{(0)}$	c_n	$b_n^{(0)} - c_n$
1	2.02429	2.02402	2.03578	-0.00044	2.02402
2	8.56891	8.56858	8.56917	0.00059	8.56858
3	37.4080	37.4074	37.4062	-0.001176	37.4074
4	167.340	167.3387	167.3419	0.00314	167.339
5	764.040	764.0360	764.0256	-0.010456	764.036
6	3550.89	3550.875	3550.917	0.041824	3550.88
7	16765.3	16765.23	16765.04	-0.195181	16765.2
8	80296.2	80296.07	80297.11	1.040963	80296.1
9	389666.42	389665.8	389659.5	-6.245779	389665.8
10	$1.9143109 \cdot 10^6$	$1.9143083 \cdot 10^6$	$1.91435 \cdot 10^6$	41.63853	$1.91431 \cdot 10^6$
11	$9.5135263 \cdot 10^6$	$9.5135154 \cdot 10^6$	$9.51321 \cdot 10^6$	-305.3492	$9.51352 \cdot 10^6$
12	$4.7800222 \cdot 10^7$	$4.7800175 \cdot 10^7$	$4.78026 \cdot 10^7$	2442.7937	$4.78002 \cdot 10^7$
13	$2.4270412 \cdot 10^8$	$2.4270392 \cdot 10^8$	$2.42682 \cdot 10^8$	-21170.878	$2.42704 \cdot 10^8$
14	$1.2448689 \cdot 10^9$	$1.2448680 \cdot 10^9$	$1.24506 \cdot 10^9$	197594.87	$1.24484 \cdot 10^9$
15	$6.4482826 \cdot 10^9$	$6.4482784 \cdot 10^9$	$6.44630 \cdot 10^9$	$-1.97595 \cdot 10^6$	$6.44828 \cdot 10^9$
16	$3.3724301 \cdot 10^{10}$	$3.3724282 \cdot 10^{10}$	$3.37453 \cdot 10^{10}$	$2.10768 \cdot 10^7$	$3.37243 \cdot 10^{10}$
17	$1.7805364 \cdot 10^{11}$	$1.7805355 \cdot 10^{11}$	$1.77814 \cdot 10^{11}$	$-2.38870 \cdot 10^8$	$1.78054 \cdot 10^{11}$
18	$9.4890304 \cdot 10^{11}$	$9.4890261 \cdot 10^{11}$	$9.51769 \cdot 10^{11}$	$2.86644 \cdot 10^9$	$9.48903 \cdot 10^{11}$
19	$5.1042446 \cdot 10^{12}$	$5.1042425 \cdot 10^{12}$	$5.06793 \cdot 10^{12}$	$-3.63083 \cdot 10^{10}$	$5.10424 \cdot 10^{12}$
20	$2.7712489 \cdot 10^{13}$	$2.7712479 \cdot 10^{13}$	$2.81965 \cdot 10^{13}$	$4.84110 \cdot 10^{11}$	$2.77125 \cdot 10^{13}$
25	$1.5068664 \cdot 10^{17}$	$1.5068661 \cdot 10^{17}$	$-2.55765 \cdot 10^{17}$	$-4.06452 \cdot 10^{17}$	$1.50687 \cdot 10^{17}$
30	$1.0574701 \cdot 10^{21}$	$1.0574699 \cdot 10^{21}$	$9.16365 \cdot 10^{23}$	$9.15308 \cdot 10^{23}$	$1.05747 \cdot 10^{21}$

References

- [1] B. E. Lautrup, A. Peterman and E. de Rafael, Recent developments in the comparison between theory and experiments in quantum electrodynamics, *Phys. Rept.* **3** (1972) 193-259.
- [2] T. Aoyama *et al.*, The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model, arXiv:2006.04822 [hep-ph]. <https://arxiv.org/pdf/2006.04822.pdf>
- [3] B. E. Lautrup, On high order estimates in QED, *Phys. Letts.* **69B** (1977) 109 - 111.
- [4] M. L. Laursen and M. A. Samuel, Borel Transform Technique and the n Bubble Diagram Contribution to the Lepton Anomaly, *Phys. Rev. D* **23** (1981) 2478 - 2481.
- [5] J. S. Schwinger, Quantum electrodynamics. III: The electromagnetic properties of the electron: Radiative corrections to scattering, *Phys. Rev.* **76** (1949) 790 - 817.
- [6] T. Kinoshita, B. Nizic and Y. Okamoto, Eighth order QED contribution to the anomalous magnetic moment of the muon *Phys. Rev. D* **41** (1990) 593 - 610.
- [7] F. Jegerlehner, The anomalous magnetic moment of the muon, Springer Tracts Mod. Phys. **274**, Springer International Publishing AG (2017) 693 p.
- [8] J. P. Aguilar, D. Greynat and E. de Rafael, Muon Anomaly from Lepton Vacuum Polarization and the Mellin-Barnes Representation, *Phys. Rev. D* **77** (2008) Art. 093010, 27 p.
- [9] O. P. Solovtsova, V. I. Lashkevich and A. V. Sidorov, On the contribution of three-bubble diagrams to $(g - 2)_L$, Nonlinear Dynamics and Applications: Proc. XXVI Annual Seminar NPC'S'2019, May 21-24, Minsk, **25** (2019) 103 - 112.
- [10] A. Kurz, T. Liu, P. Marquard and M. Steinhauser, Anomalous magnetic moment with heavy virtual leptons, *Nucl. Phys. B* **879** (2014) 1 - 18.
- [11] H. Bateman and A. Erdelyi, Higher transcendental functions, Vol. 1, New York: McGraw-Hill (1953) 302 p.
- [12] E. E. Boos and A. I. Davydychev, A Method of evaluating massive Feynman integrals, *Theor. Math. Phys.* **89** (1991) 1052 - 1063.
- [13] S. Friot, D. Greynat and E. de Rafael, Asymptotics of Feynman diagrams and the Mellin-Barnes representation, *Phys. Lett. B* **628** (2005) 73 - 84.

On high order contributions to the anomalous magnetic moments of leptons due to the vacuum polarization by lepton loops

V.I. Lashkevich, O.P. Solovtsova, O.V. Teryaev, M.E. Kozhevnikova

We analyze the high order contributions to the anomalous magnetic moments of the leptons caused by the polarization of the vacuum through the same closed lepton loops in the case when the ratio of the mass of the lepton in the loop to the mass of the external lepton is less than one. The expression for the perturbative coefficients which is obtained in this case clarify the known ones and is applicable for the any order coefficients for the physical masses of leptons.