Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 6

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Е. БИРМАН

К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ О ТЕЛАХ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ ЧАСТЕЙ С РАЗЛИЧНЫМИ УПРУГИМИ ПОСТОЯННЫМИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 13 X 1953)

1. Общее решение задачи о бесконечной полосе, составленной из двух частей (верхней полосы высотой $2a$ с упругими постоянными μ_a, σ_a и нижней высотой $2b$ с постоянными μ_b и σ_b) и произвольно загруженной на линии сопряжения обеих частей, может быть представлено в следующем виде*:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} 2a\zeta e^{-a\zeta}[s_1(\zeta)+s_2(\zeta)]+2a\zeta e^{a\zeta}[s_1(\zeta)-s_2(\zeta)]}{\operatorname{sh}^2 2a\zeta - 4a^2\zeta^2}\,d\zeta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{i\zeta(t-z)}\,dt -$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} 2a\zeta e^{-a\zeta}[q_1(\zeta)-q_2(\zeta)]+2a\zeta e^{a\zeta}[q_1(\zeta)+q_2(\zeta)]}{\operatorname{sh}^2 2a\zeta - 4a^2\zeta^2}\,d\zeta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,e^{i\zeta(t-z)}\,dt, \qquad (1)$$

---

* Мы применяем здесь решение, данное в нашей статье ([1]) (обозначения сохранены те же); соотношения (1) получены путем определения нормальных напряжений $\theta(x)$ и касательных $\gamma(x)$, действующих по линии сопряжения из интегрального уравнения:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[B(\zeta)+H(\zeta)]\,d\zeta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)\,e^{i\zeta(t-x)}\,dt + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[D(\zeta)+B(\zeta)]\,d\zeta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\gamma(t)\,e^{i\zeta(t-x)}\,dt -$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[E(\zeta)+L(\zeta)]\,d\zeta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{i\zeta(t-x)}\,dt - i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[G(\zeta)+E(\zeta)]\,d\zeta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,e^{i\zeta(t-x)}\,dt = 0,$$

выражающего условие непрерывности $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ при переходе через линию сопряжения полос. Соотношения (1) выписаны применительно к верхней полосе; напряжения и перемещения определяются формулами (1) статьи ([1]). Можно доказать, что решение задачи существует, если существуют интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|\,dt$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)\,t|\,dt$ и соблюдено условие $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt = 0$; эти условия достаточны для сходимости интегралов (1).

$$\Psi(z) = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}2a\zeta e^{-a\zeta}[s_1(\zeta)+s_2(\zeta)(1+a^{-1}\zeta^{-1})]-2a\zeta e^{a\zeta}[s_1(\zeta)-s_2(\zeta)(1-a^{-1}\zeta^{-1})]}{\operatorname{sh}^2 2a\zeta - 4a^2\zeta^2}d\zeta \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\zeta(t-z)}\, dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}2a\zeta e^{-a\zeta}[q_1(\zeta)-q_2(\zeta)(1+a^{-1}\zeta^{-1})]-2a\zeta e^{a\zeta}[q_1(\zeta)+q_2(\zeta)(1-a^{-1}\zeta^{-1})]}{\operatorname{sh}^2 2a\zeta - 4a^2\zeta^2}d\zeta \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{i\zeta(t-z)}\, dt, \qquad (1)$$

где $f(x)$ — вертикальные составляющие, $g(x)$ — горизонтальные составляющие нагрузки,

$$s_1(\zeta) = 1 - S(\zeta)[D(\zeta)L(\zeta) - E(\zeta)B(\zeta)], \quad s_2(\zeta) = S(\zeta)[E(\zeta)H(\zeta) - L(\zeta)B(\zeta)],$$

$$q_1(\zeta) = S(\zeta)[D(\zeta)E(\zeta) - G(\zeta)B(\zeta)], \quad q_2(\zeta) = S(\zeta)[G(\zeta)H(\zeta) - E(\zeta)B(\zeta)] - 1,$$

$$S(\zeta) = [D(\zeta)H(\zeta) - B^2(\zeta)]^{-1},$$

$$E(\zeta) = 2[(k_a - 1)\operatorname{sh}^2 2a\zeta + 4a^2\zeta^2],$$

$$B(\zeta) = E(\zeta) - 2\beta[(k_b - 1)\operatorname{sh}^2 2b\zeta + 4b^2\zeta^2]Q(\zeta),$$

$$G(\zeta) = k_a(\operatorname{sh}4a\zeta - 4a\zeta), \quad D(\zeta) = G(\zeta) + \beta k_b(\operatorname{sh}4b\zeta - 4b\zeta)Q(\zeta),$$

$$L(\zeta) = k_a(\operatorname{sh}4a\zeta + 4a\zeta), \quad H(\zeta) = L(\zeta) + \beta k_b(\operatorname{sh}4b\zeta + 4b\zeta)Q(\zeta),$$

$$Q(\zeta) = \frac{\operatorname{sh}^2 2a\zeta - 4a^2\zeta^2}{\operatorname{sh}^2 2b\zeta - 4b^2\zeta^2}, \quad \beta = \frac{\mu_a}{\mu_b}.$$

II. Из соотношений (1), перенеся начало координат на линию сопряжения полос и положив $a \to \infty$ и $b \to \infty$, получим решение для двух спаянных полуплоскостей *:

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\pi}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\int_0^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty}[f(t) - ig(t)]\, e^{-i\zeta(t-z)}\, dt,$$

$$\Psi(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty}[\varepsilon_2 f(t) + i\varepsilon_1 g(t)]\, e^{-i\zeta(t-z)}\, dt, \qquad (2)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{[(2k_b - 1)(k_a + \beta - 1) + k_b]\beta}{(2k_a + \beta - 1)(2\beta k_b - \beta + 1)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{(2k_a k_b - k_a - k_b)\beta}{(2k_a + \beta - 1)(2\beta k_b - \beta + 1)},$$

а напряжения и перемещения определяются формулами Г. В. Колосова:

---

* Формулы (2) выписаны для верхней полуплоскости; для нижней:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi}(1 - s_1 - s_2)\int_0^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty}[f(t) - ig(t)]\, e^{i\zeta(t-z)}\, dt,$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty}[s_2 f(t) + i(1 - s_1)g(t)]\, e^{i\zeta(t-z)}\, dt.$$

$$X_x + Y_y = 2R\Phi(z), \quad 2iX_y - X_x + Y_y = 2\Psi(z) - 2iy\Phi'(z),$$
$$2\mu(u - iv) = \frac{2k-1}{2}\int \overline{\Phi(z)}\, d\bar{z} - \frac{1}{2}\int \Phi(z)\, dz + iy\Phi(z) - \int \Psi(z) dz. \tag{3}$$

Приводим несколько примеров.

1. Сосредоточенная сила P, действующая под углом φ к горизонтали.

$$\Phi(z) = -\frac{P}{\pi z}(s_1 - s_2)\, e^{i\varphi}, \quad \Psi(z) = \frac{P}{\pi z}(s_1 \cos\varphi - is_2 \sin\varphi);$$

$$Y_y = \frac{P}{\pi r^2}\left[s_2(x\cos\varphi - y\sin\varphi) - 2(s_1 - s_2)\frac{y^2}{r^2}(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\right],$$

$$X_x = -\frac{P}{\pi r^2}\left[s_2(x\cos\varphi - y\sin\varphi) + 2(s_1 - s_2)\frac{x^2}{r^2}(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\right],$$

$$X_y = -\frac{P}{\pi r^2}\left[s_2(x\sin\varphi + y\cos\varphi) + 2(s_1 - s_2)\frac{xy}{r^2}(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\right],$$

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

2. Бесконечный ряд равноотстоящих грузов P.

$$\Phi(z) = \frac{iP}{2l}(s_1 - s_2)\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{2l}, \quad \Psi(z) = \frac{s_2}{s_1 - s_2}\Phi(z);$$

$$Y_y = -\frac{P}{2l}\left[s_1\frac{\operatorname{sh} my}{\cos mx - \operatorname{ch} my} - (s_1 - s_2)\frac{my(\cos mx \operatorname{ch} my - 1)}{(\cos mx - \operatorname{ch} my)^2}\right],$$

$$X_x = -\frac{P}{2l}\left[(s_1 - 2s_2)\frac{\operatorname{sh} my}{\cos mx - \operatorname{ch} my} + (s_1 - s_2)\frac{my(\cos mx \operatorname{ch} my - 1)}{(\cos mx - \operatorname{ch} my)^2}\right],$$

$$X_y = -\frac{P}{2l}\left[s_2\frac{\sin mx}{\cos mx - \operatorname{ch} my} - (s_1 - s_2)\frac{my \sin mx \operatorname{sh} my}{(\cos mx - \operatorname{ch} my)^2}\right],$$

где $m = \pi / l$, $2l$ — расстояние между грузами.

3. При $0 \leqslant x \leqslant c$ $g(x) = px$; при $0 > x > c$ $g(x) = 0$;

$$\Phi(z) = -\frac{s_1 - s_2}{\pi}\, pz \ln\frac{z}{z - c}, \quad \Psi(z) = \frac{s_1}{s_1 - s_2}\Phi(z);$$

$$Y_y = -\frac{p}{\pi}\left[s_1\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x - c}{y} - \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right)y - \frac{s_2 x}{2}\ln\frac{x^2 + y^2}{(x - c)^2 + y^2} + \right.$$
$$\left. + (s_1 - s_2)\frac{cy^2}{(x - c)^2 + y^2}\right],$$

$$X_x = \frac{p}{\pi}\left[(3s_1 - 2s_2)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x - c}{y} - \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right)y - \right.$$
$$\left. - (2s_1 - s_2)\frac{x}{2}\ln\frac{x^2 + y^2}{(x - c)^2 + y^2} + (s_1 - s_2)\frac{cy^2}{(x - c)^2 + y^2}\right],$$

$$X_y = \frac{p}{\pi}\left[s_1\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x - c}{y} - \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right)x + (2s_1 - s_2)\frac{y}{2}\ln\frac{x^2 + y^2}{(x - c)^2 + y^2} - \right.$$
$$\left. - (s_1 - s_2)\frac{c(x - c)y}{(x - c)^2 + y^2}\right].$$

III. Балки. Из соотношений (1), раскрывая выражения для $a^3 \frac{\partial u}{\partial y}$ и $a^3 \frac{\partial v}{\partial x}$ и полагая в правой части этих выражений $a \to 0$ и $b \to 0$, получим*:

$$-a^3 \frac{\partial u}{\partial y} = a^3 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{3k_a}{8\mu_a} \frac{s}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{\zeta^3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \zeta (t - x)\, dt =$$

$$= \frac{3k_a}{8\mu_a} \frac{s}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{\zeta^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y(t) \cos \zeta (t - x)\, dt =$$

$$= \frac{3k_a}{8\mu_a} \frac{s}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{\zeta} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} M(t) \sin \zeta (t - x)\, dt, \tag{4}$$

где

$$s = \frac{\alpha (n + \alpha)}{(\alpha + n^2)^2 + 4n (n^2 + n + 1) \alpha}, \qquad n = \frac{b}{a}, \qquad \alpha = \frac{\mu_a k_b}{\mu_b k_a},$$

$$Y(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{\zeta} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \zeta (t - x)\, dt$$ — перерезывающая сила,

$$M(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{\zeta^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \zeta (t - x)\, dt$$ — изгибающий момент

в сечении балки**.

Легко убедиться, что соотношения (4) выражают элементарную теорию изгиба балок и, таким образом, доказана справедливость гипотезы плоских сечений и для балок, составленных из различных материалов.

Поступило
10 X 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Е. Бирман, ДАН, **62**, № 2 (1948). [2] И. П. Ерохин, Тр. Ленинградск. ин-та инженеров пром. строит., в. 5 (1938).

* Исследования на эту тему см. также ([2]).

** Соотношения (4) действительны, разумеется, и для нижней составной части балки. Таким же приемом могут быть получены и соответствующие выражения для aX_y, a^2X_x, bX_y, b^2X_x.