

Ю. Л. ШМУЛЬЯН

ОПЕРАТОРЫ С ВЫРОЖДЕННОЙ  
ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 X 1953)

В статье <sup>(1)</sup> автором было введено понятие характеристической операторной функции изометрического оператора и его ортогонального расширения. Все формулы и теоремы разделов 1° и 2° этой статьи справедливы для случая любых индексов дефекта, как равных, так и неравных, конечных либо нет. В частности, если изометрический оператор имеет индексы дефекта  $(m, n)$ , причем  $m > n$ , то все числа  $\zeta, |\zeta| < 1$ , являются собственными числами любого его ортогонального расширения, причем размерности собственных подпространств  $\geq m - n$  (в случае бесконечного  $m$  считаем  $m - n = m$ ).

В настоящей статье изучается строение операторов, характеристическая функция которых имеет детерминант  $\equiv 0$  (при некоторой матричной реализации). Такую характеристическую функцию будем называть вырожденной.

1°. Пусть  $V$  — изометрический оператор, заданный на подпространстве  $G$  гильбертова пространства  $\mathcal{H}$ ;  $V(G) = G'$ ;  $D$  и  $D'$  — дефектные подпространства  $V$ ;  $w(\zeta)$  — характеристическая функция  $V$ ;  $D_0$  и  $D'_0$  — подпространства пространств  $D$  и  $D'$ , соответственно;  $\dim(D_0) = \dim(D'_0)$ ;  $u$  — оператор, отображающий  $D_0$  на  $D'_0$  изометрично.

Оператор  $\tilde{V}$  зададим равенствами:

$$\tilde{V}f = Vf \quad (f \in G); \quad \tilde{V}f = uf \quad (f \in D_0).$$

$\tilde{V}$  является изометрическим расширением  $V$  с областью задания  $G \oplus D_0$  и дефектными подпространствами  $\tilde{D} = D \ominus D_0$ ,  $\tilde{D}' = D' \ominus D'_0$ .

Операторы  $w_{ij}(\zeta)$  ( $i, j = 1, 2$ ) зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} w(\zeta)f &= w_{11}(\zeta)f + w_{12}(\zeta)f \quad (f \in D_0, w_{11}(\zeta)f \in D'_0, w_{12}(\zeta)f \in \tilde{D}'); \\ w(\zeta)f &= w_{21}(\zeta)f + w_{22}(\zeta)f \quad (f \in \tilde{D}, w_{21}(\zeta)f \in D'_0, w_{22}(\zeta)f \in \tilde{D}'). \end{aligned} \quad (1)$$

Лемма 1\*. *Характеристическая функция  $\tilde{w}(\zeta)$  оператора  $\tilde{V}$  определяется равенством:*

$$\tilde{w}(\zeta) = w_{22}(\zeta) + w_{12}(\zeta)[u - w_{11}(\zeta)]^{-1}w_{21}(\zeta). \quad (2)$$

Пусть  $T$  — ортогональное расширение  $V$ ;  $\tau$  — его анизометрическая часть. Если  $T$  не является ортогональным расширением никакого изометрического расширения  $V$ , то самосопряженный оператор  $I - TT^*$  не будет аннулировать ненулевых векторов  $\in D'$ .

\* Близкий результат изложен в (6).

Определение. Операторная функция  $w_H(T, \zeta)$ , определяемая на  $D$  равенством\*:

$$\begin{aligned} w_H(T, \zeta)f &= |I - TT^*|^{-1/2} w(T, \zeta) |I - T^*T|^{1/2} f = \\ &= |I - TT^*|^{-1/2} (T - \zeta I) (I - \zeta T^*)^{-1} |I - T^*T|^{1/2} f \quad (f \in D) \end{aligned} \quad (3)$$

для тех  $\zeta$ , для которых  $\bar{\zeta}^{-1}$  есть регулярная точка  $T$ , называется нормированной характеристической функцией  $T$  (3) ( $|I - TT^*|^{-1/2}$  имеет смысл, ибо  $w(T, \zeta)$  отображает  $D$  в  $D'$ ). При всех допустимых  $\zeta$  область значений  $w_H(T, \zeta)$  входит в  $D'$ .  $w_H(T, \zeta)$  допускает представление:

$$w_H(T, \zeta) = |e' - \tau\tau^*|^{-1/2} [\tau - w(\zeta)] \cdot [e - \tau^*w(\zeta)]^{-1} |e - \tau^*\tau|^{1/2}, \quad (4)$$

где  $e - e'$  — единичные операторы в  $D$  и  $D'$ , соответственно. Если  $T$  является ортогональным расширением некоторого оператора  $\tilde{V}$ , являющегося изометрическим расширением  $V$ , то формулы (3) и (4) теряют смысл. Нормированную характеристическую функцию в этом случае будем определять формулами

$$w_H(T, \zeta)f = Tf - \zeta J' |I - TT^*|^{1/2} (I - \zeta T^*)^{-1} |I - T^*T|^{1/2} f \quad (f \in D); \quad (3')$$

$$w_H(T, \zeta) = \tau - j' |e' - \tau\tau^*|^{1/2} w(\zeta) [e - \tau^*w(\zeta)]^{-1} |e - \tau^*\tau|^{1/2}, \quad (4')$$

легко получаемыми из (3) и (4). Здесь  $J' = \text{sign}(I - TT^*)$ ,  $j' = \text{sign}(e' - \tau\tau^*)$ .

$w_H(T, \zeta)$  удовлетворяет условиям (3):

$$w_H(T, \zeta) j w_H^*(T, \zeta) \leq j', \quad w_H^*(T, \zeta) j' w_H(T, \zeta) \leq j,$$

где  $j = \text{sign}(e - \tau^*\tau)$ .

Пусть область задания  $\tilde{V}$  есть  $G \oplus D_0$ , где  $D_0 \subseteq D$ ;  $\tilde{V}(D_0) = D'_0$ ;  $\tilde{D} = D \oplus D_0$ ;  $\tilde{D}' = D' \oplus D'_0$ ;  $\tilde{\tau}$  — оператор, заданный на  $D_0$  равенством  $\tilde{\tau}f = \tau f$  ( $f \in \tilde{D}$ );  $u$  — изометрический оператор, заданный на  $D_0$  равенством  $uf = \tilde{V}f = \tau f$  ( $f \in D_0$ );  $\tilde{\tau}$  есть анизометрическая часть  $T$ , рассматриваемого как ортогональное расширение  $\tilde{V}$ . Будем считать, что 1 не является собственным числом  $\tilde{\tau}\tilde{\tau}^*$ ; это означает, что  $T$  не является ортогональным расширением никакого изометрического расширения  $\tilde{V}$ .

Лемма 2. Нормированная характеристическая функция  $w_H(T, \zeta)$  оператора  $T$ , рассматриваемого как ортогональное расширение  $V$ , определяется равенствами

$$w_H(T, \zeta)f = uf \quad (f \in D_0), \quad w_H(T, \zeta)f = \tilde{w}_H(T, \zeta)f \quad (f \in \tilde{D}), \quad (5)$$

где

$$\tilde{w}_H(T, \zeta) = |\tilde{e}' - \tilde{\tau}\tilde{\tau}^*|^{-1/2} [\tilde{\tau} - \tilde{w}(\zeta)] \cdot [\tilde{e} - \tilde{\tau}^*\tilde{w}(\zeta)]^{-1} \cdot |\tilde{e} - \tilde{\tau}^*\tilde{\tau}|^{1/2}$$

есть нормированная характеристическая функция  $T$ , рассматриваемого как ортогональное расширение  $\tilde{V}$ .

Замечание. Рассуждениями, аналогичными вышеприведенным, обобщается формула В. П. Потапова (3,4) для дробно-линейного преобразования матриц на случай, когда диагональная форма матрицы  $\tau$  содержит единицы на главной диагонали.

2°. Пусть  $\mathcal{H}_1$  и  $\mathcal{H}_2$  — два унитарных пространства;  $V_1$  — изометрический оператор с индексами дефекта  $(m, n)$  (конечными либо нет) в пространстве  $\mathcal{H}_1$ ;  $V_2$  — изометрический оператор с индексами де-

\* Функции от самосопряженных операторов, например модуль, сигнум, определяются как обычно, см., например, (2).

фекта  $(n, p)$ ;  $D_i$  и  $D'_i$  — дефектные подпространства  $V_i$ ;  $T_i$  — ортогональное расширение  $V_i$ ;  $\tau_i$  — анизометрическая часть  $T_i$  ( $i = 1, 2$ ). В пространстве  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$  определим оператор  $T$  следующим образом <sup>(3)</sup>:

$$\begin{aligned} Tf &= T_1 f \quad (f \in \mathcal{H}_1); & Tf &= T_2 f = V_2 f \quad (f \in G_2); \\ Tf &= T_2 f + \alpha f = \tau_2 f + \alpha f \quad (f \in D_2), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\alpha = |e'_1 - \tau_1 \tau_1^*|^{1/2} s_0 |e_2 - \tau_2^* \tau_2|^{1/2}$  есть оператор, действующий из  $D_2$  в  $D'_1$ ;  $e'_1$  и  $e_2$  — единичные операторы в  $D'_1$  и  $D_2$ , соответственно;  $s_0$  — оператор, отображающий  $D_2$  на  $D'_1$  и удовлетворяющий условию  $s_0 j_1 s_0 = j_2$  ( $j_1 = \text{sign}(e'_1 - \tau_1 \tau_1^*)$ ;  $j_2 = \text{sign}(e_2 - \tau_2^* \tau_2)$ ).  $T$  является ортогональным расширением некоторого изометрического оператора  $\tilde{V}$  с индексами дефекта  $(m, p)$ .  $\mathcal{H}_1$  является инвариантным подпространством  $T$ , а  $T_1$  — индуцированным оператором.  $T$  называется сцеплением операторов  $T_1$  и  $T_2$ . Пусть  $\tau$  — анизометрическая часть  $T$ ;  $D$  и  $D'$  — дефектные подпространства  $\tilde{V}$ ;  $w_H(\zeta, \zeta)$ ,  $w_1(\zeta)$ ,  $w_2(\zeta)$  — нормированные характеристические функции операторов  $T$ ,  $T_1$  и  $T_2$ , соответственно.

Теорема 1 (умножения)

$$w_H(T, \zeta) = s_2 w_2(\zeta) s_0^* j_1 w_1(\zeta) s_1, \quad (7)$$

где  $s_1$  и  $s_2$  — некоторые операторы, отображающие  $D$  на  $D_1$  и  $D'_2$  на  $D'$ , соответственно, удовлетворяющие условиям:

$$s_1 j_1 s_1 = j, \quad s_2 j_2 s_2 = j',$$

где  $j_1 = \text{sign}(e_1 - \tau_1 \tau_1^*)$ ;  $j_2 = \text{sign}(e'_2 - \tau_2^* \tau_2^*)$ ;  $e_1$  и  $e'_2$  — единичные операторы в  $D_1$  и  $D'_2$ , соответственно.

Эта теорема в матричной форме получена в <sup>(3)</sup> для случая  $m = n = p < \infty$ .

Пусть  $m = p > n$ . Тогда  $\tilde{V}$  имеет равные индексы дефекта. Так как  $m > n$ , то каждое  $\zeta$ ,  $|\zeta| < 1$ , является собственным числом  $T_1$ , а значит и  $T$ . Основным результатом настоящей статьи является утверждение о том, что приведенный способ конструкции оператора с точечным спектром, заполняющим единичный круг, при условии  $\|T\| \leq 1$  и  $m < \infty$  является универсальным.

3°. Ниже мы будем рассматривать случай операторов с нормой  $\leq 1$ . Тогда нормированная характеристическая функция будет иметь норму  $\leq 1$  и будет регулярной при  $|\zeta| < 1$  операторной функцией. Индексы дефекта будем считать конечными, если не оговорено противное. Операторы, действующие в дефектных подпространствах (например,  $\tau$ ,  $\alpha$ ,  $w(\zeta)$  и т. п.), будем реализовывать в виде матриц, выбирая в этих подпространствах некоторые ортонормированные базисы, а сами матрицы будем обозначать теми же символами, что и соответствующие операторы. Нормированную характеристическую функцию будем называть нормированной характеристической матрицей-функцией. Теорема умножения тогда может быть записана в форме  $w_H(T, \zeta) = w_2(\zeta) w_1(\zeta)$ , ибо ортонормированные базисы можно выбрать так, чтобы унитарные матрицы  $s_0$ ,  $s_1$ ,  $s_2$  стали единичными.

Лемма 3. Если  $\varphi(\zeta)$  — регулярная в единичном круге матрица-функция,  $\|\varphi(\zeta)\| \leq 1$ , то существует оператор  $T$ , для которого  $\varphi(\zeta)$  является нормированной характеристической матрицей-функцией.

Основная теорема 2. Пусть  $T$  — ортогональное расширение изометрического оператора  $V$  с индексами дефекта  $(m, n)$  ( $m < \infty$ ),  $\|T\| \leq 1$ . Если каждая точка  $\zeta$ ,  $|\zeta| < 1$ , является собственным числом  $T$ , то  $T$  имеет инвариантное подпространство  $\mathcal{H}_1$ , в котором индуцированный оператор  $T_1$  является ортогональным расширением изометрического оператора  $V_1$  с индексами дефекта  $(m, n)$ , где  $m > n$ .

Доказательство. Нормированная характеристическая матрица-функция  $w_H(T, \zeta)$  оператора  $T$  должна иметь детерминант  $\equiv 0$  <sup>(1)</sup>. Пусть  $n$  — функциональный ранг  $w_H(T, \zeta)$  <sup>(5)</sup>. Как показано в работе автора <sup>(5)</sup>,  $w_H(T, \zeta)$  допускает представление

$$w_H(T, \zeta) = w_2(\zeta) w_1(\zeta),$$

где матрицы-функции  $w_1(\zeta)$  и  $w_2(\zeta)$  регулярны при  $|\zeta| < 1$ , нормы их  $\leq 1$ .  $w_1(\zeta)$  имеет  $m$  строк и  $n$  столбцов;  $w_2(\zeta)$  имеет  $n$  строк и  $m$  столбцов. По лемме 3 существуют операторы  $T_1$  и  $T_2$ , определенные, соответственно, в пространствах  $\mathcal{H}_1$  и  $\mathcal{H}_2$ , такие, что  $w_1(\zeta)$  и  $w_2(\zeta)$  будут нормированными характеристическими матрицами-функциями  $T_1$  и  $T_2$ , соответственно. Сцепив операторы  $T_1$  и  $T_2$  как в 2°, получим оператор  $T_0$ , нормированная характеристическая матрица-функция которого по теореме 1 совпадает с  $w_H(T, \zeta)$ . Поэтому  $T_0$  и  $T$  унитарно эквивалентны <sup>(3)</sup>. Отождествляя их, завершаем доказательство теоремы.

Замечание. Теорема остается справедливой для индексов дефекта  $(m, p)$ , где  $m \neq p$ , причем, если  $m > p$ , то она тривиальна.

Теорема 3. Если  $T_1$  — оператор в пространстве  $\mathcal{H}_1$ , являющийся ортогональным расширением изометрического оператора  $V_1$  с индексами дефекта  $(m, p)$ , то существует пространство  $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1$  и в нем оператор  $T$ , являющийся ортогональным расширением некоторого изометрического оператора  $V$  с равными индексами дефекта  $(q, q)$ , где  $q \leq \max\{m, p\}$ , так что  $\mathcal{H}_1$  является инвариантным относительно  $T$ , а индуцированный оператор совпадает с  $T_1$ . Если  $\|T_1\| \leq 1$ , то  $T$  можно выбрать так, чтобы  $T$  было минимальным расширением  $V$ . Конечность индексов дефекта  $V_1$  не предполагается.

«Крайним» случаем в теореме 2 является случай  $n = 0$ , т. е.  $w_H(T, \zeta) \equiv 0$ . В этом случае  $T$  является минимальным расширением  $V$ , так что характеристическая функция изометрического оператора  $V$  равна тождественно нулю.

Нижеследующая теорема полностью характеризует этот случай, причем ни равенства, ни конечности индексов дефекта  $V$  не предполагается.

Теорема 4. Для того чтобы характеристическая функция простого изометрического оператора  $V$  с индексами дефекта  $(m, p)$  тождественно равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы  $V$  был ортогональной суммой простых изометрических операторов  $V_1$  и  $V_2$  с индексами дефекта  $(m, 0)$  и  $(0, p)$ , соответственно (т. е. максимальных изометрических операторов).

По поводу строения и классификации операторов  $V_1$  и  $V_2$  см. <sup>(2)</sup>.

Житомирский государственный  
педагогический институт  
им. Ив. Франко

Поступило  
24 IV 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Ю. Л. Шмутьян, ДАН, 87, № 1 (1952). <sup>2</sup> Н. И. Ахнезер, И. М. Глазман, Теория линейных операторов, 1950. <sup>3</sup> М. С. Лившиц, В. П. Потапов, ДАН, 72, № 4 (1950). <sup>4</sup> В. П. Потапов, ДАН, 72, № 5 (1950). <sup>5</sup> Ю. Л. Шмутьян, ДАН, 93, № 4 (1953). <sup>6</sup> А. В. Штраус, ДАН, 70, № 4 (1950).