Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 6

МАТЕМАТИКА

ХУА ЛО-КЭН

К ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

ПОЛНАЯ ОРТОНОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ГИПЕРСФЕР

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 XI 1953)

Пусть $n \geqslant 2$ и $z = (z_1, \ldots, z_n)$ обозначает некоторый вектор с n комплексными компонентами $z_1, \ldots, z_n$. Пусть R — область, определенная значениями z, удовлетворяющими условиям:

$$|zz'|^2 + 1 - 2\bar{z}z' > 0, \tag{1}$$

$$1 - |zz'|^2 > 0, \tag{2}$$

где $zz' = z_1^2 + \ldots + z_n^2$, $\bar{z}z' = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2$.

Чтобы построить ортонормальную систему области R, построим сперва ортонормальную систему на действительной единичной гиперсфере γ, которая определена равенством $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Обозначим через $\dot{x}$ элемент поверхности сферы. Начнем с некоторого представления n-мерной группы вращений T. Симметризованную кронеккерову форму m-й степени обозначим через $T^{[m]}$. Порядок представления равен $N_m = \frac{1}{m!} n(n+1)\ldots(n+m-1)$. Положим, что группа вращений T применяется к n-мерным векторам $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Тогда мы можем предположить, что $T^{[m]}$ применяется к N_m-мерным векторам

$$\sqrt{\frac{m!}{j_1! \ldots j_n!}}\, x_n^{j_1} \ldots x_n^{j_n}, \quad j_1 + \ldots + j_n = m.$$

Эти векторы обозначим через $x^{[m]}$. $T^{[m]}$ ортогонально; известно, что $T^{[m]}$ может быть разложено в прямую сумму

$$T_m + T_{m-2} + \ldots + T_{m-r[m/r]},$$

где T_r — некоторая матрица с $[N_r - N_{r-2}]$ рядами. Можно предположить далее, что T_r ортогональны. Введем обозначение

$$(x_1^2 + \ldots + x_m^2)^l\, \varphi_{m-2l}^{(i)}(x), \quad 1 \leqslant i \leqslant N_{m-rl} - N_{m-r(l+1)},$$

для векторов, к которым применяется T_{m-2l}. Мы можем доказать тогда, что

$$\int \varphi_r^{(i)}(x)\, \varphi_s^{(j)}(x)\, \dot{x} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \text{ или } r \neq s; \\ \rho_r, & \text{если } i = j \text{ и } r = s, \end{cases}$$

где ρ_r не зависит от i.

Тем самым доказано, что система функций:

$$(z_1^2 + \ldots + z_n^2)^l \varphi_{m-2l}^{(j)}(z), \quad 1 \leqslant j \leqslant N_{m-rl} - N_{m-rl-r} \tag{3}$$

образует ортогональную систему на γ. В самом деле, пусть $z_j = x_j + iy_j$ и $\dot{z} = \prod_{j=1}^{n} dx_j\, dy_j$, тогда

$$\int_R (zz')^l (\overline{zz'})^m \varphi_r^{(j)}(z) \overline{\varphi_s^{(i)}}(z)\, \dot{z} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \text{ или } r \neq s, \text{ или } l \neq m \\ \tau_{l,r}, & \text{если } i = j, \ r = s, \ l = m; \end{cases} \tag{4}$$

где $\tau_{l,r}$ — некоторая константа, не зависящая от j. От постоянного множителя $\tau_{l,r}$ можно избавиться, и тогда мы получим полную ортонормальную систему в пространстве R.

Чтобы получить формулу Коши для R, рассмотрим сперва характеристическое множество $\mathscr{L}$, определенное равенствами

$$1 = |zz'|^2, \quad |zz'|^2 + 1 - 2\overline{z}z' = 1,$$

т. е.

$$1 = |z_1^2 + \ldots + z_n^2| = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2.$$

Мы получаем, следовательно, что $z_r = e^{i\varphi} x_r$, где φ действительно и $x_1, \ldots, x_n$ — действительные числа, удовлетворяющие равенству $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. В $\mathscr{L}$ система (3) также ортогональна. Мы находим, что ядро Фурье равно

$$\frac{1}{2\pi} (1 - 2z\overline{w}' + zz\overline{ww'})^{-n/2}.$$

Следовательно, получаем формулу Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int \ldots \int_{\mathscr{L}} \frac{f(w)\, \dot{w}}{(1 - 2z\overline{w}' + zz'\,\overline{ww'})^{n/2}}$$

для функции $f(z)$, аналитической в R и $\in L^2$ на $\mathscr{L}$, где $\dot{w} = e^{i\varphi} d\varphi \dot{x}$.

В заключение я должен упомянуть об одном приложении, из которого можно вывести теорему Адамара о трехмерной сфере, именно, пусть $\mathscr{L}(r)$ будет множество, определенное $r_j = re^{i\varphi} x_j$ $(x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $W(r)$ — максимальное абсолютное значение $f(r)$ на $\mathscr{L}(r)$. Тогда $\log W(r)$ — выпуклая функция от $\log r$. Общее, пусть

$$I_p(r) = \Big(\int_{\mathscr{L}(r)} |\varphi(w)|^p \dot{w} \Big)^{1/p};$$

тогда $\log I_p(r)$ является выпуклой функцией от $\log r$.

Институт математики
Академии наук
Китайской Народной Республики

Поступило
2 VI 1953