Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 6

МАТЕМАТИКА

К. П. СТАНЮКОВИЧ

НОВЫЙ ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком М. В. Келдышем 4 IX 1953)

Напишем основные уравнения, описывающие одноразмерные адиабатические течения газа в трубе, в форме Лагранжа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial u} = 0; \tag{1}$$

$$h = \int_0^{x_0} \rho_0 \, dx_0 = \int_0^{x} \rho \, dx. \tag{2}$$

Здесь h является лагранжевой координатой, причем величина h равна массе газа, содержащейся между сечением $x = 0$ и текущим; величины ρ_0 и x_0 определяют значения плотности и координаты в момент времени $t = 0$.

Энтропия S при этом является функцией только координаты x_0, так как условие адиабатичности в форме Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{3}$$

Поскольку $h = h(x_0)$, то энтропия является функцией h:

$$S = S(h). \tag{4}$$

Выражение (2) можно написать в виде:

$$\rho \frac{\partial x}{\partial h} = 1$$

или в виде

$$\frac{\partial x}{\partial h} = v, \tag{5}$$

где $v = 1/\rho$ — удельный объем.

Дифференцируя (5) по t, поскольку

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u, \tag{6}$$

придем к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial h} = \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{7}$$

Аппроксимируем зависимость между p, v и S:

$$pv^k = e^{(S-S_0)/c_v} \tag{8}$$

выражением вида

$$p = -A^2(S)\,v + B(S). \tag{9}$$

Очевидно, что подобная аппроксимация, введенная в газовую динамику еще С. А. Чаплыгиным ([1]) и улучшенная С. А. Христиановичем и Л. И. Седовым ([2]) для интегрирования плоских изэнтропических установившихся движений газа, удобна и для решения задач об одномерном адиабатическом движении газа.

У Чаплыгина величины A и B считались всюду постоянными, а у Христиановича и Седова A и B считались постоянными на определенных интервалах — на одном интервале брались одни значения A и B, на другом — другие (аппроксимация изэнтропы двумя прямыми).

Дифференцируя (1) по t и подставляя $\partial p / \partial t = -A^2 \partial v / \partial t$, придем к результату:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial h}\left(A^2 \frac{\partial v}{\partial t}\right). \tag{10}$$

Заметив, что $A = A(h)$ (поскольку $A = A(S)$; $S = S(h)$) и что $\partial v / \partial t = \partial u / \partial h$, придем к уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial h}\left(A^2 \frac{\partial u}{\partial h}\right) = A^2 \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} + \frac{dA^2}{dh}\frac{\partial u}{\partial h}. \tag{11}$$

Введем новую переменную $\tau = \tau(h)$ и величину $A_1(h) = A^2 d\tau / dh$; тогда уравнение (11) примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{A_1^2}{A^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{A_1 dA_1}{A^2 \partial \tau}\frac{\partial u}{\partial \tau}. \tag{12}$$

Примем величину $A_1 = 1$, тогда уравнение (12) перейдет в

$$A^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}. \tag{13}$$

Исследование решения уравнения (13) общеизвестно. Однако эти решения применять к решению конкретных задач со сложными начальными условиями неудобно. Положим теперь величину $A_1 = A$, тогда уравнение (12) можем написать в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{d \ln A}{d\tau}\frac{\partial u}{\partial \tau}. \tag{14}$$

Решение этого уравнения в тех случаях, когда

$$A = A_0 = \text{const} \quad \text{или} \quad A = A_0(\tau + \tau_0)^2, \tag{15}$$

где A_0 и τ_0 — константы, совершенно очевидно. В первом случае

$$u = F_1(t - \tau) + F_2(t + \tau); \quad h = A_0\tau + \text{const}, \tag{16}$$

где F_1 и F_2 — произвольные функции; во втором случае

$$u = \frac{F_1(t - \tau) + F_1(t + \tau)}{\tau}; \quad h = \frac{A_0}{3}(\tau + \tau_0)^3 + \text{const}. \tag{17}$$

Рассмотрим сначала более подробно наиболее простой случай, когда $A = A_0 = \text{const}$. Поскольку $h = A_0\tau + \text{const}$, то

$$u = F_1\left(t - \frac{h}{A_0}\right) + F_2\left(t + \frac{h}{A_0}\right), \tag{18}$$

и далее легко определяем, что:

$$v = \frac{F_2 - F_1}{A_0} + \frac{B(h) - B_1}{A_0^2}; \quad p = A_0(F_2 - F_1) + B_1, \tag{19}$$

где $B_1 = \text{const}$.

При решении задач этим методом следует семейство изэнтроп (8) (каждой изэнтропе соответствует свое значение S) аппроксимировать серией ломаных, т. е. на различных интервалах давления брать различные значения величины A_0, при этом для заданного значения S величина B также будет различна и на различных интервалах изменений p. Аппроксимацию величин A_0 и B следует подчинить условию, чтобы в среднем на всем интервале изменения S (в заданном интервале изменения p) наклон прямой соответствовал бы среднему наклону истинной изэнтропы. Данный способ будет давать хорошую точность при сравнительно малом изменении p и S.

Рассмотрим более общий случай, когда

$$A = A(h) = A_0(\tau + \tau_0)^{2n}, \tag{20}$$

где $n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \ldots$ (дальше для краткости мы везде будем опускать величину τ_0, помня, что τ определяется с точностью до произвольной постоянной); при этом уравнение (14) примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{2n}{\tau}\frac{\partial u}{\partial \tau}; \quad h = \frac{A_0 \tau^{1+2n}}{1+2n} = \text{const}. \tag{21}$$

Введем новую независимую переменную $z = \tau^2$, тогда уравнение (21) примет вид:

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1+2n}{2}\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{22}$$

Дифференцируя или интегрируя j раз по z почленно уравнение (22), придем к результату:

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u_{\pm j}}{\partial t^2} = z\frac{\partial^2 u_{\pm j}}{\partial z^2} + \left(\frac{1+2n}{2} \pm j\right)\frac{\partial u_{\pm j}}{\partial z}, \tag{23}$$

где знак плюс соответствует операции дифференцирования $u_j = \partial^j u / \partial z^j$, а знак минус — операции интегрирования $u_{-j} = \underbrace{\iint \ldots \int}_{j} u \underbrace{dz\,dz \ldots dz}_{j}$.

Полагая величину

$$\frac{1+2n}{2} \pm j = \frac{1}{2} \tag{24}$$

и возвращаясь к старой переменной τ, придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 u_{\pm j}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{\pm j}}{\partial \tau^2},$$

решение которого

$$u_{\pm j} = F_1(t - \tau) + F_2(t + \tau).$$

Поскольку из (24) имеем $\mp j = n$, то решение уравнения (21) можно написать в виде:

$$u = \frac{\partial^n}{\partial z^n}[F_1(t - \tau) + F_2(t + \tau)] = \frac{\partial^n}{\partial z^n}[F_1(t - \sqrt{z}) + F_2(t + \sqrt{z})], \tag{25}$$

причем для $n=1, 2, 3$ приходим к операции дифференцирования уравнения (25), а для $n=-1, -2, -3$ к операции интегрирования. В случае иных значений n решение получается в функциях Бесселя. Легко убедиться в том, что уже при значениях $n=\pm 1$ аппроксимация семейства ломаными получается более удовлетворительной, чем в случае $A=A_0=\mathrm{const}$.

В этих случаях удобно разбивать область изменения давлений для каждой изэнтропы независимо, полагая максимальное давление заданным, а за минимальное давление принимая величину в α раз меньшую, чем максимальное. При этом для заданного значения p величина h увеличивается с уменьшением энтропии. Величина A_0 в этом случае весьма легко определяется.

Подобная аппроксимация может быть применена и для плоских установившихся решений при наличии ударных волн. Зная $u=u(h, t)$, легко из уравнений (7) и (9) определить:

$$v=v(h,\ t); \quad p=p(h,\ t).$$

В эти решения, очевидно, войдет еще одна константа.

Рассмотрим теперь одноразмерное движение, обладающее точечной симметрией; основные уравнения в координатах Лагранжа можно написать для этих движений в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{r^N}{}\frac{\partial p}{\partial h}=0; \quad h=\int\limits_0^{r_0}\rho_0 r_0^N dr_0=\int\limits_0^{r}\rho r^N dr. \tag{26}$$

Здесь $N=0, 1, 2$ для плоских, цилиндрических и сферических волн, соответственно.

Введем дополнительное уравнение

$$r^N\frac{\partial p}{\partial h}=-\frac{\partial\left(A^2 v / r^N\right)}{\partial h}+B, \tag{27}$$

где $A=A(h)$; $B=B(h)$; $h=h(S)$.

На основании уравнений (26) и (27) в результате можно притти к уже известному уравнению (11): $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial h}\left(A^2\frac{\partial u}{\partial h}\right)$. Проводя последовательно снова все сделанные выше вычисления, зная $u=u(h,\ t)$, определим $v=v(h,\ t)$; $p=p(h,\ t)$, но при этом, поскольку связь между p и v дана дифференциальным уравнением (28), мы при определении p дополнительно получим еще одну произвольную функцию $\Phi=\Phi(t)$, не считая произвольной константы. При $N=1, 2$ в связь между p и v будет кроме h входить явно t. Выбирая соответствующим образом эту произвольную функцию, можно связь между $p=p(h,\ v,\ t)$ сделать минимально зависящей от времени.

Чтобы связь между p и v для заданного значения h или S имела смысл и приближалась бы к адиабатической, необходимо на различных интервалах времени полагать время, входящее в соотношение между $p=p(h_0,\ v,\ t)$ равным своему среднему значению на выбранном интервале времени.

Метод интегрирования при $n=\pm 1$ был разработан также Н. И. Поляковой.

Поступило
2 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чаплыгин, О газовых струях, 1949. [2] Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 1950.