Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 6

МАТЕМАТИКА

М. Н. ОЛЕВСКИЙ

ОБ УРАВНЕНИИ $A_P\, u\,(P, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + p(t)\frac{\partial}{\partial t} + q(t)\right) u(P, t)$ (A_P — ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР) И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА — ДАРБУ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 17 X 1953)

§ 1.1. Пусть $p_1(t), p_2(t), q_1(t)$ и $q_2(t)$, $t \geqslant 0$, — непрерывные в любом конечном интервале функции, имеющие непрерывные производные 1-го порядка. Пусть $v_1(x_1, x_2, \ldots, x_m; t)$ и $v_2(x_1, x_2, \ldots. x_m; t)$ (короче, $v_1(P, t)$ и $v_2(P, t)$) суть решения уравнения

$$A_P\, v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + p_2(t)\frac{\partial v}{\partial t} + q_2(t)\, v, \tag{1}$$

удовлетворяющие условиям

$$v_1(P, t)|_{t=0} = f(P), \quad \partial v_1 / \partial t\,|_{t=0} = 0; \tag{2^1}$$

$$v_2(P, t)|_{t=0} = 0, \quad \partial v_2 / \partial t\,|_{t=0} = f(P). \tag{2^2}$$

Здесь A_P — линейный оператор, который для удобства изложения мы предполагаем следующего вида:

$$A_P = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(P)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} b_i(P)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(P);$$

относительно функций a_{ik}, b_i, c и f предполагается, что они в рассматриваемой области обеспечивают существование гладкого (непрерывного вместе со своими производными 1-го и 2-го порядков) решения задачи Коши для уравнения (1) ((1), стр. 126 — 127).

Тогда решения $u_1(x_1, x_2, \ldots, x_m; t)$ и $u_2(x_1, x_2, \ldots, x_m; t)$ уравнения

$$A_P\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p_1(t)\frac{\partial u}{\partial t} + q_1(t)\, u, \tag{3}$$

удовлетворяющие условиям

$$u_1(P, t)|_{t=0} = f(P), \quad \partial u_1 / \partial t\,|_{t=0} = 0; \tag{4^1}$$

$$u_2(P, t)|_{t=0} = 0, \quad \partial u_2 / \partial t\,|_{t=0} = f(P), \tag{4^2}$$

выражаются по формулам

$$u_i(P, t) = r(t)\, v_i(P, t) + \int_0^t K_i(\xi, t)\, v_i(P, \xi)\, d\xi \quad (i = 1,\ 2), \tag{5}$$

где

$$r(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t (p_2 - p_1)\, dt\right); \tag{6}$$

$K_i(\xi, t)$, $i = 1, 2$, $\xi \leqslant t$, суть решения уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} - \frac{\partial (p_2(\xi) K)}{\partial \xi} + q_2(\xi) K = \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + p_1(t) \frac{\partial K}{\partial t} + q_1(t) K, \tag{7}$$

определяемые по условиям

$$K_i(t, t) = \frac{r(t)}{8} \int_0^t [p_2^2 - p_1^2 + 2(p_2' - p_1') - 4q_2 + 4q_1]\, dt, \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial \xi} - p_2(\xi) K_1\right)_{\xi=0} = 0, \tag{9^1}$$

$$K_2(\xi, t)|_{\xi=0} = 0. \tag{9^2}$$

2. Функция $u_2(P, t)$ может быть также получена по формуле

$$u_2(P, t) = \int_0^t K(\xi, t)\, v_1(P, \xi)\, d\xi, \tag{10}$$

где $K(\xi, t)$ — решение уравнения (7), удовлетворяющее условиям (9^1), и $K(t, t) = r(t)$.

3. Принимая $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$, мы по формуле (10) (заменяя в ней u_2 на v_2), находим решение v_2 задачи (2^2) Коши для уравнения (1), если известно решение v_1 задачи (2^1) Коши для того же уравнения. В случае, если $p_1 = p_2 = 0$ и $q_1 = q_2$ — постоянное число, легко видеть, что $K(\xi, t) = 1$, и мы получаем известное соотношение $v_1 = \partial v_2 / \partial t$.

4. В случае, если A представляет собой оператор умножения на постоянное число λ, формулы (5) обращаются в формулы, установленные (при $p_1 = p_2 = q_2 = 0$) в [2] и [3] (см. также [4]).

5. Доказательство утверждений пп. 1 и 2 вытекает из равенства

$$(A_P - \underset{t}{B_1})\, u_i(P, t) = \int_0^t v_i(P, \xi)\, (\underset{\xi}{\overline{B}_2} - \underset{t}{B_1})\, K_i(\xi, t)\, d\xi + \left(\frac{\partial K_i}{\partial \xi} - p_2(\xi) K_i\right)_{\xi=0} v_i(P, 0) -$$

$$- K_i(0, t) \left.\frac{\partial v_i(x, \xi)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} + [(p_2(t) - p_1(t))\, r(t) - 2r'(t)]\, \frac{\partial v_i(P, t)}{\partial t} +$$

$$+ \left[(p_2(t) - p_1(t))\, K_i(t, t) - 2\frac{dK_i(t, t)}{dt} - \underset{t}{B_1} r(t) + q_2(t)\, r(t)\right] v_i(P, t), \tag{*}$$

в котором $\underset{t}{B_i} u$ обозначает $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p_i(t) \dfrac{\partial u}{\partial t} + q_i(t)\, u$, а $\overline{B}$ — оператор, сопряженный B.

При условиях, наложенных на функции p_i и q_i, функции K_i однозначно определяются уравнением (7) и условиями (8) и (9) и являются непрерывными вместе с частными производными 1-го и 2-го порядков, что в соединении с гладкостью функций v_i оправдывает выкладки, используемые при установлении равенства (*).

6. Приведем результат применения формулы (10) в случае, который понадобится в § 2. Принимая $p_1 = p_2 = q_2 = 0$, $q_1 = b$ постоянным, оператор $A_P = \Delta_2$ (где Δ_2 здесь и ниже обозначает второй дифференциальный параметр Бельтрами в m-мерном пространстве S_m постоянной кривизны k) и учитывая, что v_1 и v_2 известны [5], а $K(\xi, t) = J_0(\sqrt{b(t^2 - \xi^2)})$, мы по формуле (10) можем определить u_1 и u_2. Окончательно мы получаем

$$u_1(P, t) =$$

$$= c \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t J_0\left(\sqrt{\frac{k}{4}(m-1)^2 - b}\, \sqrt{z^2 - t^2}\right) \frac{\partial}{\partial z}\left\{L_{(m-3)/2}\left[\left(\frac{\sin \sqrt{k} z}{\sqrt{k}}\right)^{m-2} \bar{f}(P, z)\right]\right\} dz; \tag{11}$$

здесь $2^{(m-1)/2}\Gamma(m/2)C=\sqrt{\pi}$, $L_s\bar{f}(P, z)$ обозначает ([5]) при s целом s-кратное применение операции $\frac{\sqrt{k}}{\sin\sqrt{k}z}\frac{\partial}{\partial z}$ к $\bar{f}(P, z)$; при s полуцелом $(s=n-{}^1/_2)$ $L_s=L_n L_{-{}^1/_2}$, где

$$L_{-{}^1/_2}\bar{f}(P, z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z\frac{\sin\sqrt{k}x\bar{f}(P, x)\,dx}{\sqrt{\cos\sqrt{k}x-\cos\sqrt{k}z}},$$

функция же $\bar{f}(P, z)$ представляет собой среднее значение функции f по сфере в S_m радиуса z с центром в точке P*.

§ 2. 1. В этом параграфе мы рассматриваем задачу Коши для различных обобщений** уравнения Эйлера — Дарбу, представляемых уравнением

$$A_P u=u_{tt}+a\sqrt{l}\operatorname{ctg}\sqrt{l}\,t\,u_t+bu, \tag{12}$$

для которого предыдущие выводы (в силу наличия особенности у коэффициента при u_t) непосредственно не применимы. Но и в этом случае удается установить соотношение вида (5) с $r(t)=0$ между решениями уравнения (12) при различных парах значений параметров a и b. При помощи этого соотношения и (11) можно, в частности, записать в явном виде решение задачи Коши для уравнения (12) в случае, когда $A_P=\Delta_2$ при произвольных значениях $a>0$ и b***.

2. Решение уравнения****

$$\Delta_2 u=u_{tt}+a\sqrt{l}\operatorname{ctg}\sqrt{l}t\,u_t+bu, \tag{13}$$

удовлетворяющее условиям (4^1), единственно при $a\geqslant 0$. При $a<0$ и не равном $1-2n$ $(n=1, 2, \ldots)$ решение существует но не единственно. При $a=1-2n$ $(n=1, 2, \ldots)$ решение существует лишь при условии, если функция f удовлетворяет уравнению

$$(A-b)(A-b+l(a+1))\cdots(A-b+l(n-2)(a+n-2))f=0.$$

3. Укажем сначала эвристический путь получения искомого соотношения. С этой целью заметим, что решение $u_1(P, t; a, b, l)$ уравнения (12), удовлетворяющее условиям (4^1), можно записать в следующей символической форме

$$u_1=F\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{1}{l}\lambda},\ \frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{1}{l}\lambda},\ \frac{a+1}{2};\ \sin^2\frac{\sqrt{l}}{2}t\right)f(P); \tag{14}$$

Здесь λ должно быть заменено оператором A_P-b (каждый член ряда (14) представляет собой целый многочлен относительно A_P над $f(P)$).

Непосредственное толкование выражения, стоящего в правой части (14), возможно лишь для бесконечно дифференцируемой функции f.

Учитывая, что при некоторых частных значениях параметров a и b решение u_1 может быть найдено в предположениях относительно функции f, необходимых лишь по природе вопроса (см., например, для $A_P=\Delta$ и $a=b=0$ в ([7]), стр. 452), естественно преобразовать

---

* При $k>0$ функция $\bar{f}(P, z)$ должна быть продолжена в $\pi/\sqrt{k}\leqslant z\leqslant 2\pi/\sqrt{k}$ нечетно, а далее периодически (с периодом $2\pi/\sqrt{k}$).

** Если $A_P=\partial^2/\partial x^2$, $b=0$ и $l\to 0$, мы получаем уравнение, рассматривавшееся Эйлером, Пуассоном и Дарбу ([6]).

*** При $a=m-1$, $b=0$ и $k=l$ решение задачи (4^1) Коши для уравнения (13) представляется ([10]) функцией $\bar{f}(P, t)$.

**** Для простоты изложения мы предполагаем ниже $k<0$ и $l<0$.

(14) к виду, в котором a и b имели бы желательные значения. Воспользуемся с этой целью формулой

$$F(\alpha, \beta, \gamma; \xi) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\gamma-\nu)} \int_0^1 z^{\nu-1}(1-z)^{\gamma-\nu-1} F(\alpha, \beta, \nu; \xi z)\, dz, \qquad (15)$$

справедливой ([8]) при $\operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(\nu) > 0$, $\xi \neq 1$, $|\arg(1-\xi)| < \pi$, и известным соотношением

$$F(\alpha, \beta, \gamma; \xi) = (1-\xi)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma; \xi). \qquad (16)$$

Преобразуя гипергеометрическую функцию в (14) при помощи (16) и применяя после этого (15) при $2\nu = a - c + 1$, $c > 0$, и снова (16), получаем

$$\mathrm{B}\left(\frac{a+1-c}{2}, \frac{c}{2}\right)(1-\xi)^{\frac{a-1}{2}} F\left(\frac{a}{2}+\delta, \frac{a}{2}-\delta, \frac{a+1}{2}; \xi\right) =$$

$$= \int_0^1 [\xi(1-\xi z)]^{\frac{a-1-c}{2}} (1-z)^{\frac{c}{2}-1} F\left(\frac{a-c}{2}+\delta, \frac{a-c}{2}-\delta, \frac{a+1-c}{2}; \xi z\right) dz; \qquad (17)$$

здесь $\delta^2 \equiv \frac{a^2}{4} - \frac{\lambda}{l}$, B — бета-функция. Вводя, наконец, вместо $\xi = \sin^2 \frac{\sqrt{l}}{2} t$ и $\xi z = \sin^2 \frac{\sqrt{l}}{2} \theta$ и обозначая $a - c = a_1$, $b_1 = b - {}^1/_4\, lc(2a - c)$, мы из (17), учитывая (14), получаем искомую формулу

$$v_1\left(P, t; a_1 + c, b_1 + \frac{1}{4} lc(2a_1 + c); l\right) =$$

$$= \psi(t) \int_0^t (\sin\sqrt{l}\theta)^{a_1} (\cos\sqrt{l}t - \cos\sqrt{l}\theta)^{\frac{c}{2}-1} u_1(P, \theta; a_1, b_1; l)\, d\theta, \qquad (18)$$

где
$$\mathrm{B}\left(\frac{a_1+1}{2}, \frac{c}{2}\right)\psi(t) \equiv \sqrt{l}(\sin\sqrt{l}t)^{1-a_1-c}.$$

4. Справедливость формулы (18) при $a_1 \geqslant 0$ и $c > 0$ может быть обнаружена прямой проверкой, опираясь на свойства функции $u_1(P, t; a_1, b_1; l)$ как решения задачи Коши для уравнения (12) с достаточно гладкой функцией f.

5. Полагая в (18) $a_1 = 0$ и используя (11), мы при $a > 0$ получаем решение уравнения (13), удовлетворяющее условиям (4^1). При $k \to 0$ мы таким образом получаем решение аналогичной задачи для уравнения $\Delta u = u_{tt} + a\sqrt{l}\operatorname{ctg}\sqrt{l}t\, u_t + bu$, а при $l \to 0$ — для уравнения $\Delta_2 u = u_{tt} + at^{-1}u_t + bu$, и, наконец, при $k \to 0$ и $l \to 0$ для уравнения $\Delta u = u_{tt} + at^{-1}u_t + bu$, для которого при $b = 0$ решение было недавно указано ([9]).

Поступило
22 IX 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, 1950. [2] А. Я. Повзнер, Матем. сборн., **23**, в. 1 (1948). [3] Б. М. Левитан, Усп. матем. наук, **4**, в. 1 (1949). [4] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., **15**, № 4 (1951). [5] М. Н. Олевский, ДАН, **46**, № 1 (1945). [6] G. Darboux, Théorie des surfaces, **2**, 1915. [7] Р. Курант, Д. Гильберт, Методы матем. физ., **2**, 1945. [8] A. Erdélyi, Quart. J. Math., **10**, 176 (1939). [9] A. Weinstein, C. R., 234, № 26, 2584 (1952). [10] М. Н. Олевский, ДАН, **45**, № 3 (1945).