Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 6

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР Ю. В. ЛИННИК

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО К ТЕОРИИ БИНАРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

В заметке (1) мною и А. В. Малышевым изучалось распределение целых точек на сфере $x^2+y^2+z^2=m$ при помощи аналитической арифметики обыкновенных кватернионов. Аналогичным образом можно изучать целые точки на гиперболоиде $x^2-y^2-z^2=D>0$, введя для этой цели соответствующую алгебру обобщенных кватернионов (эрмитионов). В ней присутствуют делители нуля, но она допускает определение кольца целых эрмитионов, в котором существует алгорифм Евклида. Наличие алгорифма Евклида вообще оказывается характерным для весьма широкого класса эрмитионных алгебр с неопределенной нормой и приводит к многим арифметическим следствиям.

Вводя подстановку $x=\frac{c+a}{2}$, $z=\frac{c-a}{2}$, $y=b$, получаем гиперболоид $ac-b^2=D>0$; считая x и z половинами целых чисел одинаковой четности, y — целым числом и изучая их распределение на гиперболоиде $x^2-y^2-z^2=D$, получим теоремы о распределении бинарных квадратичных форм $a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2$ с детерминантом $b^2-ac=-D<0$. Эти формы будут приведенными тогда и только тогда, когда выполнены неравенства: $|2y|<x-z<x+z$, либо $0\leqslant 2y<x-z=x+z$, либо $0\leqslant 2y=x-z<x+z$. Будем рассматривать область на гиперболоиде под условиями $|2y|\leqslant x-z\leqslant x+z$, которую назовем основной областью $\mathfrak{A}$. Полагая $f(x,y,z)=\frac{x^2}{D}-\frac{y^2}{D}-\frac{z^2}{D}$ на верхней полости гиперболоида $f(x, y, z)=1$, получим реализацию плоскости Лобачевского, беря за движения автоморфизмы f (см. (2)), причем константа Лобачевского $h=\frac{1}{\sqrt{3}}D^{3/4}$. Область $\mathfrak{A}$ будет треугольником с углами $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ и 0 и площадью $\frac{\pi}{9}D^{3/2}$.

Пусть задано и зафиксировано сколь угодно большое число K_0. Кругом Лобачевского Q_0 с центром в вершине гиперболоида и радиусом K_0 будет область гиперболоида под его сечением плоскостью $x=\sqrt{D}\,\mathrm{ch}\,K_0$. Обозначим пересечение $\mathfrak{A}\cap Q_0=\mathfrak{A}_0$; $\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_0=\mathfrak{A}_1$. Пусть задано простое число $q\geqslant 3$ под условием $(-D/q)=+1$.

Имеют место теоремы, получаемые методами работы (1):

Теорема 1. *При $D>D_0(K_0, q)$ количества приведенных форм в областях $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_1$, $H(\mathfrak{A}_0)$ и $H(\mathfrak{A}_1)$, удовлетворяют неравенствам: $H(\mathfrak{A}_0)>c_1(K_0, q)\,h(-D)$, $H(\mathfrak{A}_1)>c_2(K_0, q)\,h(-D)$, где c_1 и c_2 — константы и $h(-D)$ — полное число классов форм.*

Следствие. При любой константе K и $D > D_0(q, K)$ существуют приведенные формы (a, b, c) под условием $a < \sqrt{D}/K$ в количестве $> c(K, q) \cdot h(-D)$.

Надо заметить, что это следствие могло бы быть легко выведено из гипотезы Римана для L-ряда с реальным характером $(\mathrm{mod}\, D)$ или из соответствующих „плотностных" гипотез, но не выводится из современных „плотностных" теорем.

Теорема 2. *Пусть внутри круга Q_0 задана область S, содержащая внутри себя круг Лобачевского радиуса $\lambda > 0$, где λ — сколь угодно малая фиксированная константа*. Тогда при $D > D_0(\lambda, q, K_0)$ количество $H(S)$ приведенных форм (a, b, c), отвечающих внутренности этой области, удовлетворяет неравенству:*

$$H(S) > c(\lambda, q, K_0)\, h(-D).$$

Следствие 1. Среди $h(-D)$ приведенных форм (a, b, c) существуют формы под условиями: $\alpha_1 \sqrt{D} < a < \alpha_2 \sqrt{D}$; $\alpha_3 \sqrt{D} < b < \alpha_4 \sqrt{D}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ — любые константы, совместимые с условиями приведенности. Это выполняется при $D > D_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_4, q, K_0)$, и количество соответствующих форм будет $> c(\alpha_1, \ldots, \alpha_4, q, K_0)\, h(-D)$.

Следствие 2. Сравнения $b^2 \equiv -D\, (\mathrm{mod}\, a)$, рассматриваемые при указанных выше условиях для a и b, имеют $> c(\alpha_1, \ldots, \alpha_4, q, K_0) h(-D)$ решений.

Надо отметить, что наличие хотя бы одной формы типа, указанного в следствии 1, или хотя бы одного решения сравнений при ограничениях следствия 2, повидимому, непосредственно не выводится из гипотезы Римана для указанного выше L-ряда.

Пусть $-D$ фундаментальный дискриминант и группа классов чисто коренных форм $\mathfrak{G}$ имеет подгруппу $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$. Если индекс $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$ не очень велик, то для приведенных форм, отвечающих классам подгруппы $\mathfrak{H}$, имеют место аналоги теорем 1 и 2:

Теорема 1'. *Пусть индекс $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$ не превосходит константы K_1. Пусть $H'(\mathfrak{A}_0)$ и $H'(\mathfrak{A}_1)$ — количества форм (a, b, c) из полугруппы $\mathfrak{H}$ в областях $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$. Тогда*

$$H'(\mathfrak{A}_0) > c_3(K_0, K_1, q)\, h(-D), \quad H'(\mathfrak{A}_1) > c_4(K_0, K_1, q)\, h(-D).$$

Теорема 2'. *Пусть $H'(S)$ — количество форм из подгруппы $\mathfrak{H}$, отвечающих внутренности области S, указанной в теореме 2. Тогда в условиях теоремы 2:*

$$H'(S) > c_5(\lambda, q, K_0, K_1)\, h(-D).$$

Поступило
17 X 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Линник, А. В. Малышев, ДАН, 89, № 2 (1953). [2] Б. А. Венков, Тр. МИАН, 38, 30 (1951).

* Окружность Лобачевского на гиперболоиде $f(x, y, z) = 1$ с центром x_0, y_0, z_0 и радиусом λ имеет уравнения $f(x, y, z) = 1$, $xx_0 - yy_0 - zz_0 = D\,\mathrm{ch}\,\lambda$ [2].