

С. Г. КРЕЙН

## О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА И ГИДРОДИНАМИКИ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 20 X 1953)

В настоящей заметке мы изучаем свойства линейных операторов векторного анализа и гидродинамики, заданных на функциональных пространствах, соответствующих краевой задаче гидродинамики вязкой жидкости.

1°. Рассмотрим конечную односвязную область  $G$ , звездную относительно начала координат, ограниченную поверхностью  $\Gamma$ . Обозначим через  $H$  гильбертово пространство, состоящее из всех вектор-функций  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$ , определенных в  $G$ , для которых

$$\iiint |\mathbf{v}|^2 d\tau < \infty$$

со скалярным произведением

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \iiint \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} d\tau^*.$$

Введем в рассмотрение некоторые подпространства пространства  $H$ : подпространство  $\Pi$  является замыканием множества всех потенциальных вектор-функций  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ , принадлежащих  $H$ ; подпространство  $D$  является замыканием множества соленоидальных вектор-функций  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ ; подпространство  $N$  — ортогональное дополнение к подпространству  $\Pi$  в  $H$ :  $H = \Pi \oplus N$ .

Условимся верхним индексом  $k$  обозначать множество всех функций из данного подпространства, имеющих  $k$  непрерывных в  $\bar{G}$  производных; нижним индексом 0 обозначать множество всех функций, равных нулю на границе  $\Gamma$ ; нижним индексом 00 — равных нулю в граничной полоске. Так например,  $H^0$  обозначает множество всех непрерывных функций из  $H$ ;  $N_{00}^1$  — множество всех непрерывно дифференцируемых функций из  $N$ , равных нулю в граничной полоске.

Подпространства  $\Pi$ ,  $D$  и  $N$  рассматривались С. Л. Соболевым<sup>(1)</sup> и им же были установлены утверждения, которые мы сформулируем в виде леммы.

**Лемма 1.** *Пространство  $\Pi$  состоит из всех обобщенно потенциальных векторов  $\mathbf{v} = \text{grad}^* p$ . Пространство  $N$  является подпространством  $D$  ( $N \subset D$ ) и представляет собою замыкание всех бесконечно дифференцируемых соленоидальных векторов ( $\text{div } \mathbf{v} = 0$ ), равных нулю в граничной полоске ( $\bar{N}_{00}^\infty = N$ ).*

\* Здесь и дальше точка — знак скалярного умножения трехмерных векторов, а крест — векторного.

Из результатов Вейля <sup>(2)</sup> немедленно следует

**Лемма 2.** *Ортогональное дополнение  $D \ominus N$  состоит из бесконечно дифференцируемых потенциальных вектор-функций, потенциал которых является гармонической в  $G$  функцией.*

Обозначим через  $P_N$  оператор ортогонального проектирования на подпространство  $N$ . Из леммы 2 вытекает, что проекция  $\mathbf{u} = P_N \mathbf{v}$  элемента  $\mathbf{v} \in D$  на  $N$  имеет столько же производных в  $G$ , сколько и  $\mathbf{v}$ .

2°. Оператор ротор. На всех векторах  $\mathbf{v}$  из  $H^1$  естественным образом определен оператор  $\text{rot } \mathbf{v}$ .

**Теорема 1.** *Оператор  $\text{rot } \mathbf{v}$ , рассматриваемый в  $N$  и определенный в  $N_{00}^1$ , является симметрическим оператором. Ортогональное дополнение к области его значений состоит из гармонических вектор-функций из  $N$ , удовлетворяющих в  $G$  уравнению*

$$\text{rot } \mathbf{v} = \text{grad } \varphi \quad (\mathbf{v} \in N). \quad (1)$$

Если в равенстве (1)  $\text{rot } \mathbf{v} \in H$ , то вектор  $\text{grad } \varphi \in D \ominus N$ . Таким образом, оператор  $\text{rot}$  порождает некоторое отображение в  $D$ .

**Лемма 3.** *Оператор  $\text{rot}$  в  $N \ominus \text{rot } N_{00}^1$  имеет ограниченный обратный  $\text{rot}^{-1}$ , определенный на  $D \ominus N$ .*

Утверждение леммы следует из представления решения уравнения (1) в виде

$$\mathbf{v} = \text{rot}^{-1}(\text{grad } \varphi) = P_N \left[ \int_0^{\bar{\rho}} (\text{grad } \varphi \times \frac{\bar{\rho}}{\rho}) d\rho \right],$$

где  $\rho$  — радиус-вектор точки из  $G$ .

**Теорема 2.** *Существует ограниченный оператор, определенный на всем  $D$  формулой*

$$\text{rot}^{-1} \mathbf{f} = P_N \left[ \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{P_N \mathbf{f} \times \mathbf{r}}{r^3} d\tau \right] + \text{rot}^{-1} (I - P_N) \mathbf{f}^*$$

*и являющийся обратным оператором к оператору  $\text{rot}$  в  $N$ .*

3°. Оператор Лапласа. В множестве  $N^1$  введем новое скалярное произведение по формуле

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (\text{rot } \mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{v}). \quad (2)$$

Из теоремы 2 следует, что пополнение  $N^1$  в этой метрике содержится в  $N$ . Обозначим через  $[N]$ , а замыкание множества  $N_{00}^1$  в метрике (2) через  $[N]_0$ .

**Лемма 4.** *Ортогональным дополнением  $[N] \ominus [N]_0$  в метрике (2) является совокупность бесконечно дифференцируемых вектор-функций  $\mathbf{w}$  из  $N$ , удовлетворяющих уравнению*

$$\Delta \mathbf{w} = \text{grad } p, \quad (3)$$

где  $p$  — гармоническая в  $G$  функция.

Совокупность  $[N]_0$  состоит из тех вектор-функций, которые вместе со своими первыми обобщенными частными производными могут быть сколь угодно точно в среднем квадратичном приближены непрерывно дифференцируемыми функциями, аннулирующимися в граничной полоске. Про две вектор-функции естественно говорить, что они «принимают одни и те же граничные значения»\*\*, если их разность принадлежит  $[N]_0$ .

\* В этой формуле, так же как и в (5) и (7), под  $\mathbf{r}$  понимается вектор, соединяющий точку области интегрирования с точкой, в которой вычисляется значение функции, стоящей слева.

\*\* В дальнейшем мы кавычки опускаем.

Обозначим через  $P_{[N]_0}$  оператор ортогонального в метрике (2) проектирования  $[N]$  на  $[N]_0$ . Из леммы 4 следует, что проекция  $\mathbf{w} = P_{[N]_0}\mathbf{v}$  элемента  $\mathbf{v} \in N$  на  $[N]_0$  имеет в  $G$  столько же производных, сколько и  $\mathbf{v}$ .

**Теорема 3.** Для всякой вектор-функции  $\mathbf{f}$  из  $D^1$  существует бесконечно дифференцируемое решение  $\mathbf{w}$  уравнения (3), принадлежащее  $D$  ( $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$ ) и принимающее те же граничные значения, что и  $\mathbf{f}$ . Это решение определяется по формуле

$$\mathbf{w} = \mathbf{f} - P_{[N]_0} P_N \mathbf{f}. \quad (4)$$

Отметим еще, что функция вида (4) всегда может быть выражена через три скалярные гармонические функции в виде

$$\mathbf{w} = \operatorname{grad}(\rho^2 \varphi) + \psi \vec{\rho} + \operatorname{rot}(\chi \vec{\rho}) + \operatorname{grad} \theta,$$

где  $\varphi, \chi, \theta$  — гармонические функции,  $\vec{\rho}$  — радиус-вектор точки из  $G$ , а  $\psi$  — гармоническая функция, связанная с  $\varphi$  соотношением

$$\psi = -4\varphi + \frac{6}{r^3} \int_0^{\rho} \rho^2 \varphi d\rho.$$

Теорема существования решения уравнения (3), удовлетворяющего условию  $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$  и заданным граничным условиям, в классических терминах была доказана Одквистом (3) при помощи интегральных уравнений, получаемых для уравнения (3) методами, аналогичными методам теории потенциала.

Оператор Лапласа  $-\Delta v$  естественным образом определен на всех элементах  $\mathbf{v} \in N_{00}^2$  и, таким образом, может быть рассматриваем как симметрический положительно-определенный оператор в  $N$  с плотной областью определения  $N_{00}^2$ . Следуя Фридрихсу (см. (4)), можно построить самосопряженное расширение оператора  $-\Delta$  в  $N$ , которое мы, по терминологии М. Г. Крейна (5), будем называть жестким расширением и временно обозначим через  $A$ .

**Теорема 4.** Оператор  $A$ , полученный жестким самосопряженным расширением оператора  $-\Delta$ , имеет вполне непрерывный обратный, определенный на всем пространстве  $N$  формулой

$$\mathbf{u} = A^{-1} \mathbf{g} = P_{[N]_0} P_N \left\{ -\frac{1}{8\pi} \iiint \left[ \frac{\mathbf{g}}{r} + \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \mathbf{r} \right] d\tau \right\}. \quad (5)$$

Если  $\mathbf{g} \in N^1$ , то  $\mathbf{u}$  в  $G$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathbf{u} = \operatorname{grad} p - \mathbf{g}, \quad (6)$$

где

$$p = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}{r^3} d\tau. \quad (7)$$

Уравнение (5) можно, применяя к обеим частям оператор  $P_N$ , переписать в виде

$$-P_N \Delta \mathbf{u} = \mathbf{g},$$

поэтому оператор  $A$  мы будем обозначать через  $-P_N \Delta$ .

Теоремы 3 и 4 содержат теорему существования решений линейных уравнений гидродинамики вязкой жидкости при заданных граничных условиях, доказанную также Одквистом (3) при помощи построения тензора Грина. Из вполне непрерывности оператора  $(P_N \Delta)^{-1}$  следует: существование полной системы малых нормальных колебаний

вязкой жидкости в замкнутом сосуде вблизи состояния покоя, законность применения различных вариационных методов (4) для отыскания этих колебаний, а также существование решения задачи Коши для линейных уравнений соответствующей нестационарной задачи (6).

4°. Линейная часть оператора Навье—Стокса. В этом пункте мы рассмотрим задачу о малых колебаниях вязкой жидкости, заполняющей область  $G$ , вблизи ее некоторого стационарного движения. Уравнения таких колебаний, как известно, имеют вид

$$\lambda \mathbf{u} + (\mathbf{v}_0, \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{v}_0 = -\frac{1}{\gamma} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}_\Gamma = 0. \quad (8)$$

Если применить к обеим частям первого уравнения оператор  $P_N$ , то (8) можно записать в виде

$$\lambda \mathbf{u} + P_N [(\mathbf{v}_0, \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{v}_0] = \nu P_N \Delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in N_0. \quad (9)$$

Нетрудно показать, что в метрике  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (\text{rot } \mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{v})$  оператор  $(\mathbf{v}_0, \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{v}_0$  ограничен, оператор  $P_N$  изометричен и оператор  $(P_N \Delta)^{-1}$  вполне непрерывен.

Если применить к обеим частям уравнения (9) оператор  $(P_N \Delta)^{-1}$ , то мы приходим к уравнению того типа, который был изучен М. В. Келдышем (7). Из результатов М. В. Келдыша следует:

*Теорема 5. Вблизи всякого стационарного движения жидкости в замкнутом сосуде существует полная система малых колебаний вида*

$$\mathbf{u} = e^{\lambda t} \left( \mathbf{u}_k + \frac{t}{1!} \mathbf{u}_{k-1} + \dots + \frac{t^k}{k!} \mathbf{u}_0 \right).$$

Пользуясь результатами М. В. Келдыша, можно также сделать ряд выводов об асимптотическом поведении собственных чисел  $\lambda$  уравнения (9).

Криворожский  
горный институт

Поступило  
30 VI 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> С. Л. Соболев, ДАН, 81, № 6 (1951). <sup>2</sup> Н. Weyl, Duke Math. J., 7 (1940). <sup>3</sup> Ф. К. Г. Odqvist, Math. Zs., 32, Н. 3 (1930). <sup>4</sup> С. Г. Михлин, Проблема минимума квадратичного функционала, 1952. <sup>5</sup> М. Г. Крейн, Матем. сборн., 20 (62):3 (1947). <sup>6</sup> Д. Е. Долидзе, Сообщ. АН Груз. ССР, 3, № 7 (1942). <sup>7</sup> М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 1 (1951).