ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

УДК 539.12

Ю.Д. ЧЕРНИЧЕНКО

О РЕШЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СУПЕРПОЗИЦИИ ЛОКАЛЬНОГО И СУММЫ НЕЛОКАЛЬНЫХ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ КВАЗИПОТЕНЦИАЛОВ

Найдено решение конечно-разностного квазипотенциального уравнения с полным квазипотенциалом, описывающим взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс. Полное взаимодействие, представляющее собой суперпозицию локального и суммы нелокальных сепарабельных квазипотенциалов, является центрально-симметричным, не зависит от энергии и допускает существование истинных связанных состояний. Рассмотрение проведено в рамках релятивистского квазипотенциального подхода в квантовой теории поля. Получены точные выражения для приращений фазового сдвига и исследованы их свойства, определены условия существования связанных состояний и дано обобщение теоремы Левинсона.

Ключевые слова: *квантовая теория поля, релятивистский квазипотенциальный подход, сепарабельное взаимодействие, приращения фазового сдвига, теорема Левинсона.*

Введение

Одно из основных достоинств нелокальных сепарабельных двухчастичных взаимодействий связано с возможностью их применения в ядерной физике и для решения проблемы многих тел, например при решении уравнений Фаддеева в задаче трех тел. Это обусловлено тем, что парциальная t-матрица для таких взаимодействий имеет простую форму. Именно это обстоятельство позволяет непосредственно экстраполировать ее за поверхность энергии-импульса. Другим достоинством таких взаимодействий является их применение при решении нерелятивистского двухчастичного уравнения Шредингера, а также при решении нерелятивистской обратной задачи [1–5]. Тем не менее такой подход неприменим для существенно релятивистских систем [6, 7]. Для таких систем, в частности, образованных легкими кварками, вклад релятивистских поправок к гамильтониану взаимодействия сравним с основным нерелятивистским членом.

Квазипотенциальный подход [8] до сих пор является одним из эффективных методов релятивистского описания двухчастичных систем [9–12]. В данной работе в рамках релятивистского квазипотенциального подхода в квантовой теории поля [13] исследуется решение конечно-разностного квазипотенциального уравнения. Полный квазипотенциал представляет собой суперпозицию локального и суммы нелокальных сепарабельных квазипотенциалов и описывает взаимодействие двух бесспиновых частиц неравных масс $(m_1 \neq m_2)$. При этом будем считать, что полное взаимодействие является центральносимметричным, не зависит от энергии и допускает существование истинных связанных состояний, а его локальная часть $w(\rho)$ является известной и согласуется с экспериментальными данными при низких энергиях. Полное взаимодействие выберем в виде

$$V\left(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}';E_{q'}\right) \equiv V\left(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}'\right) = w\left(\rho\right)\delta\left(\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho}\right) + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{M_l}\left(2l+1\right)\varepsilon_{lm}\upsilon_{lm}\left(\rho\right)\upsilon_{lm}\left(\rho'\right)P_l\left(\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}'}{\rho\rho'}\right). \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon_{lm}=-1$ отвечает притягивающему взаимодействию, а $\varepsilon_{lm}=1$ – отталкивающему; $P_l\left(z\right)$ – функция Лежандра первого рода; $\rho=|\boldsymbol{\rho}|$, $\rho'=|\boldsymbol{\rho}'|$. Тогда, следуя работе [14], релятивистский аналог дифференциального уравнения Шредингера для волновой функции $\Psi_{q'}\left(\boldsymbol{\rho}\right)$ в конфигурационном представлении с взаимодействием (1) в случае неравных масс можно представить в форме $\left(\hbar=c=1\right)$

$$\frac{m'^2}{\mu}\left[\operatorname{ch}\left(i\lambda'\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{i\lambda'}{\rho}\operatorname{sh}\left(i\lambda'\frac{\partial}{\partial\rho}\right)-\frac{\lambda'^2}{2\rho^2}\Delta_{\theta,\varphi}\exp\left(i\lambda'\frac{\partial}{\partial\rho}\right)-\operatorname{ch}\chi'\right]\Psi_{q'}(\rho)+ \\ +\int d\rho' V(\rho,\rho')\Psi_{q'}(\rho')=0, \tag{2}$$

где $\Delta_{\theta,\varphi}$ есть угловая часть оператора Лапласа; $\lambda'=1/m'$ – комптоновская длина волны эффективной релятивистской частицы массы $m'=\sqrt{m_1 m_2}$, а $\mu=m'^2/(m_1+m_2)$ [1].

Разложив волновую функцию $\Psi_{q'}(\boldsymbol{\rho})$ по парциальным волнам [17, 18], т.е.

$$\Psi_{q'}(\boldsymbol{\rho})=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l\,\frac{\psi_l(\rho,\chi')}{\rho}P_l\left(\frac{\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{\rho}}{q'\rho}\right),\ q'=|\boldsymbol{q}'|,$$

уравнение (2) преобразуется к виду

$$\left[\nabla+\left(1+\frac{l(l+1)}{r^{(2)}}\right)\nabla^*-2\operatorname{ch}\chi'+W(r)\right]\psi_l(r,\chi')+\sum_{m=1}^{M_l}\varepsilon_{lm}V_{lm}(r)\int_0^\infty dr'V_{lm}(r')\psi_l(r',\chi')=0, \tag{3}$$

где

$$\nabla=\exp\left(-i\frac{d}{dr}\right),\quad \nabla^*=\exp\left(i\frac{d}{dr}\right),\quad V_{lm}(r)=\sqrt{8\pi\lambda'\mu/m'^2}\,\rho\upsilon_{lm}(\rho),$$
$$W(r)=2\mu w(\rho)/m'^2,\quad \rho=\lambda' r,\quad \rho'=\lambda' r'.$$

Отметим, что дифференциально-разностные уравнения для некоторых важных для приложений потенциалов решаются точно [16, 19–21]. Теория рассеяния в релятивистском конфигурационном пространстве также обладает формальным сходством с квантово-механической теорией рассеяния. При этом весьма существенно, что свободные решения $s_l(r,\chi)$, $c_l(r,\chi)$ и $e_l^{(1,2)}(r,\chi)$ уравнения (2) выражаются через известные функции Лежандра [16], аналитические свойства которых хорошо известны [22]. Более того, для функций $s_l(r,\chi)$ справедливы свойства ортогональности и полноты [16]

$$(2/\pi)\int_0^\infty dr s_l(r,\chi)s_l^*(r,\chi')=\delta(\chi'-\chi),\quad (2/\pi)\int_0^\infty d\chi' s_l(r,\chi')s_l^*(r',\chi')=\delta(r'-r). \tag{4}$$

Однако «размазанные» $\hat{\theta}$-функции, входящие в выражение для квазипотенциальной парциальной функции Грина и обуславливающие конечно-разностный характер квазипотенциальных уравнений, приводят к интегральным уравнениям фредгольмовского типа для волновой функции. В нерелятивистской же теории весьма существенно, что уравнение Шредингера в интегральной форме есть уравнение Вольтерра. Именно это обстоятельство не позволяет использовать метод функций Грина, как это обычно делается в нерелятивистской задаче для двух частиц. В связи с этим возникла необходимость разработки метода решения квазипотенциального уравнения (2), в основу которого были бы положены свойства ортогональности и полноты (4). При этом в рамках релятивистского квазипотенциального подхода полная энергия двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс в с.ц.и., $\sqrt{s_{q'}}$, пропорциональна энергии $E_{q'}$ одной эффективной релятивистской

---

[1] Напомним, что уравнение (2) можно рассматривать как релятивистское обобщение уравнения Шредингера в духе геометрии Лобачевского, реализующейся на верхней поле′ массового гиперболоида $E_{q'}^2-\boldsymbol{q}'^2=m'^2$. Это уравнение описывает рассеяние на квазипотенциале (1) одной эффективной релятивистской частицы, имеющей массу m' и относительный 3-импульс $\boldsymbol{q}'$. Тем самым эффективная релятивистская частица массы m' выступает вместо двухчастичной системы и несет полную энергию взаимодействующих частиц в с.ц.и., $\sqrt{s_{q'}}$, пропорциональную ее энергии $E_{q'}$ [14]:

$$\sqrt{s_{q'}}=(m'/\mu)E_{q'},\ E_{q'}=\sqrt{m'^2+\boldsymbol{q}'^2}=m'\operatorname{ch}\chi',$$

где χ' имеет смысл быстроты эффективной частицы. При этом в уравнении (2) l нумерует собственные значения инвариантно определенного относительного орбитального момента двух частиц [15], а модуль релятивистской относительной координаты ρ нумерует собственные значения оператора Казимира группы Лоренца и, следовательно, является релятивистским инвариантом [15, 16].

частицы массы m'. Таким образом, релятивистскую проблему двух тел и в случае неравных масс в рамках данного подхода можно рассматривать как одночастичную. Однако, несмотря на то, что эффективная частица с массой m' находится на гиперболоиде $E_{q'}^2 - \boldsymbol{q}'^2 = m'^2$, тем не менее в уравнении (2) сохраняется зависимость от другого массового параметра – приведенной массы μ. Такая зависимость необходима для обеспечения правильных предельных переходов: нерелятивистского и бесконечно большой массы одной из частиц. Более того, реальные расчеты уровней энергии водородоподобных атомов показывают [10], что они зависят от обоих массовых параметров m' и μ (или их комбинации).

Целью настоящей работы является решение уравнения (3) с граничным условием

$$\psi_l\left(0,\chi'\right)=0, \tag{5}$$

получение выражений для приращений фазового сдвига, исследование условий существования связанных состояний и обобщение теоремы Левинсона для суперпозиции локального и суммы нелокальных сепарабельных квазипотенциалов. При этом будем считать, что локальная составляющая $W(r)$ полного взаимодействия известна и допускает существование $\sigma_l^{(0)}$ связанных состояний с энергиями

$$0 \le E_{tj}^{(0)} = E_{q'j}/m' = \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(0)} < 1, \quad \chi_{tj}^{(0)} = i\kappa_{tj}^{(0)}, \quad 0<\kappa_{tj}^{(0)} \le \pi/2, \quad j=1,2,\ldots,\sigma_l^{(0)}. \tag{6}$$

1. Волновая функция и приращения фазового сдвига

Решение уравнения (3) с граничным условием (5) будем рассматривать для класса потенциалов, для которых локальный $W(r)$ и компоненты $V_{lm}(r)$ сепарабельного квазипотенциалов удовлетворяют условиям

$$rW\left(r\right)\in L_1\left(0,\infty\right), \quad rV_{lm}\left(r\right)\in L_1\left(0,\infty\right), \quad m=1,2,\ldots,M_l\,. \tag{7}$$

Первое требование в (7) вместе со свойствами (4) означает (см. [18]), что регулярное решение $\psi_l^{(0)}(r,\chi')$ уравнения (3) при $\varepsilon_{lm}\equiv 0$ с граничным условием $\psi_l^{(0)}(0,\chi')=0$, когда локальный квазипотенциал $W(r)$ допускает существование связанных состояний с энергиями (6), является единственным и удовлетворяет условиям ортогональности и полноты:

$$\int_0^\infty dr\psi_l^{(0)}(r,\chi)\psi_l^{(0)^*}(r,\chi') = \begin{cases} \dfrac{\delta(E'-E)}{d\rho_l^{(0)}(E)/dE}, \quad E=\operatorname{ch}\chi\ge 1, \quad E'=\operatorname{ch}\chi'\ge 1, \\ \left[C_{lj}^{(0)}\right]^{-1}\delta_{jj'}, \ 0\le E_{tj}^{(0)}=\operatorname{ch}\chi_{tj}^{(0)}<1, \ 0\le E_{tj'}^{(0)}=\operatorname{ch}\chi_{tj'}^{(0)}<1, \\ \chi=\chi_{tj}^{(0)}=i\kappa_{tj}^{(0)}, \quad \chi'=\chi_{tj'}^{(0)}=i\kappa_{tj'}^{(0)}, \quad 0<\kappa_{tj}^{(0)}, \ \kappa_{tj'}^{(0)}\le\pi/2, \\ j, \quad j'=1,2,\ldots,\sigma_l^{(0)}, \\ 0, \ E=\operatorname{ch}\chi\ge 1, \ 0\le E_{tj'}^{(0)}=\operatorname{ch}\chi_{tj'}^{(0)}<1, \ \chi'=\chi_{tj'}^{(0)}=i\kappa_{tj'}^{(0)}, \\ 0<\kappa_{tj'}^{(0)}\le\pi/2; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\rho_l^{(0)}(E)\psi_l^{(0)}(r,\chi)\psi_l^{(0)^*}(r',\chi) &= \sum_{j=1}^{\sigma_l^{(0)}} C_{lj}^{(0)}\psi_l^{(0)}(r,\chi_{tj}^{(0)})\psi_l^{(0)^*}(r',\chi_{tj}^{(0)}) + \\ &+\int_0^\infty d\chi\tau_l^{(0)}(\chi)\psi_l^{(0)}(r,\chi)\psi_l^{(0)^*}(r',\chi)=\delta(r'-r), \end{aligned} \tag{9}$$

где спектральная плотность и нормировочные коэффициенты даются выражениями

$$\frac{d\rho_l^{(0)}(E)}{dE} = \begin{cases} \operatorname{sh}^{-1}\chi\tau_l^{(0)}(\chi), \quad E=\operatorname{ch}\chi\ge 1, \\ \sum\limits_{j=1}^{\sigma_l^{(0)}} C_{lj}^{(0)}\delta(E-E_{tj}^{(0)}), \quad 0\le E=\operatorname{ch}\chi<1, \quad 0\le E_{tj}^{(0)}=\operatorname{ch}\chi_{tj}^{(0)}<1, \\ \chi=i\kappa, \quad \chi_{tj}^{(0)}=i\kappa_{tj}^{(0)}, \quad 0<\kappa, \quad \kappa_{tj}^{(0)}\le\pi/2; \end{cases} \tag{10}$$

$$\left[C_{lj}^{(0)}\right]^{-1}=\int_0^\infty dr\left|\psi_l^{(0)}(r,\chi_{tj}^{(0)})\right|^2=-F_l^W(-\chi_{tj}^{(0)})\dot F_l^W(\chi_{tj}^{(0)})/\left[4iQ_l^2(\operatorname{cth}\chi_{tj}^{(0)})\right],$$
$$\tau_l^{(0)}(\chi)=(2/\pi)Q_l^2(\operatorname{cth}\chi)\left|\,F_l^W(\chi)\,\right|^{-2},\quad \dot F_l^W(\chi_{tj}^{(0)})=dF_l^W(\chi_{tj}^{(0)})/d\chi_{tj}^{(0)},\quad j=1,2,\dots,\sigma_l^{(0)}. \tag{11}$$

Здесь $Q_l(z)$ – функция Лежандра второго рода; $F_l^W(\chi)$ – функция Йоста для локального квазипотенциала $W(r)$, связанная с соответствующим ей фазовым сдвигом $\delta_l^W(\chi)$ соотношением $F_l^W(\chi)=\left|F_l^W(\chi)\right|\exp\left[-i\delta_l^W(\chi)\right]$[2].

Решение уравнения (3) с граничным условием (5) будем искать методом итераций, используя интегральные преобразования волновой функции, полученной в предыдущей итерации. На первом шаге итерации ($n=1$) рассматриваем суперпозицию $W(r)$ и $\varepsilon_{l1}V_{l1}(r)V_{l1}(r')$. Тем самым будем искать решение $\psi_l^{(1)}(r,\chi')$ уравнения (3) при $m=1$, удовлетворяющее граничному условию вида (5). Для этого введем, следуя работе [18], релятивистские интегральные преобразования

$$\tilde\psi_l^{(1)}(\chi',\chi)=\int_0^\infty dr\psi_l^{(1)}(r,\chi')\psi_l^{(0)^*}(r,\chi),\quad \tilde V_{l1}^{(0)}(\chi)=\int_0^\infty drV_{l1}(r)\psi_l^{(0)^*}(r,\chi)\,; \tag{12}$$

$$\psi_l^{(1)}(r,\chi')=\int_0^\infty d\rho_l^{(0)}(E)\tilde\psi_l^{(1)}(\chi',\chi)\psi_l^{(0)}(r,\chi),\quad V_{l1}(r)=\int_0^\infty d\rho_l^{(0)}(E)\tilde V_{l1}^{(0)}(\chi)\psi_l^{(0)}(r,\chi), \tag{13}$$

где спектральная плотность $d\rho_l^{(0)}(E)/dE$ определена в (10), а функция $\psi_l^{(0)}(r,\chi)$ удовлетворяет условиям (8) и (9). Тогда, используя результаты работы [18], будем иметь

$$\psi_l^{(1)}(r,\chi')=\psi_l^{(0)}(r,\chi')+\frac12\varepsilon_{l1}N_{l1}(\chi')\sum_{j=1}^{\sigma_l^{(0)}}C_{lj}^{(0)}\frac{\tilde V_{l1}^{(0)}(\chi_{tj}^{(0)})\psi_l^{(0)}(r,\chi_{tj}^{(0)})}{\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi_{tj}^{(0)}}+$$
$$+\frac12\varepsilon_{l1}N_{l1}(\chi')P\int_0^\infty d\chi\frac{\tau_l^{(0)}(\chi)\tilde V_{l1}^{(0)}(\chi)\psi_l^{(0)}(r,\chi)}{\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi},$$
$$\operatorname{tg}\delta_l^{V_{l1}}(\chi')=-(\pi/2)\operatorname{sh}^{-1}\chi'\varepsilon_{l1}A_{l1}(\chi')/\Phi_{l1}(\operatorname{ch}\chi'), \tag{14}$$
$$N_{l1}(\chi')=\varepsilon_{l1}\tilde V_{l1}^{(0)^*}(\chi')/\Phi_{l1}(\operatorname{ch}\chi'),\quad A_{l1}(\chi)=\varepsilon_{l1}\tau_l^{(0)}(\chi)\left|\tilde V_{l1}^{(0)}(\chi)\right|^2,$$
$$\Phi_{l1}(\operatorname{ch}\chi')=\varepsilon_{l1}-\frac12\sum_{j=1}^{\sigma_l^{(0)}}C_{lj}^{(0)}\frac{\left|\tilde V_{l1}^{(0)}(\chi_{tj}^{(0)})\right|^2}{\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi_{tj}^{(0)}}-\frac12P\int_0^\infty d\chi\frac{\left|A_{l1}(\chi)\right|}{\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi},$$

где P – символ главного значения. Кроме того, волновая функция $\psi_l^{(1)}(r,\chi')$ имеет асимптотику

---

[2] Напомним, что если значения $\chi_{tj}^{(0)}$ $(0<\operatorname{Im}\chi_{tj}^{(0)}=\kappa_{tj}^{(0)}\le\pi/2,\ j=1,2,\dots,\sigma_l^{(0)})$ являются нулями функции Йоста $F_l^W(\chi)$, то им отвечают связанные состояния с энергиями (6). Действительно, при $F_l^W(\chi_{tj}^{(0)})=0$ из представления

$$\psi_l^{(0)}(r,\chi')=\{F_l^W(-\chi')f_l^{(0)}(r,\chi')+\exp[i\pi(l+1)]F_l^W(\chi')f_l^{(0)}(r,-\chi')\}/[2iQ_l(\operatorname{cth}\chi')]$$

следует, что

$$\psi_l^{(0)}(r,\chi_{tj}^{(0)})=F_l^W(-\chi_{tj}^{(0)})f_l^{(0)}(r,\chi_{tj}^{(0)})/[2iQ_l(\operatorname{cth}\chi_{tj}^{(0)})].$$

Здесь $f_l^{(0)}(r,\chi')$ есть решение Йоста уравнения (3) при $\varepsilon_{lm}\equiv0$ с граничным условием $\lim_{r\chi'\to\infty}\exp[-i(r\chi'-\pi l/2)]f_l^{(0)}(r,\chi')=1$. Значит, функция $\psi_l^{(0)}(r,\chi_{tj}^{(0)})$ убывает экспоненциально при $r\to\infty$, $0<\operatorname{Im}\chi_{tj}^{(0)}=\kappa_{tj}^{(0)}\le\pi/2,\ j=1,2,\dots,\sigma_l^{(0)}$, а следовательно, мы имеем связанные состояния с энергиями (6). При этом все нули функции Йоста простые и чисто мнимые, так как [18] $4\operatorname{sh}(\operatorname{Re}\chi_{tj}^{(0)})\sin(\operatorname{Im}\chi_{tj}^{(0)})\int_0^\infty dr\left|f_l^{(0)}(r,\chi_{tj}^{(0)})\right|^2=0$ при $\operatorname{Re}\chi_{tj}^{(0)}=0,\ 0<\operatorname{Im}\chi_{tj}^{(0)}\le\pi/2,\ j=1,2,\dots,\sigma_l^{(0)}$.

$$\psi_l^{(1)}(r,\chi') = \frac{\left|F_l^{(1)}(\chi')\right|}{Q_l(\mathrm{cth}\,\chi')}\sin\left[r\chi' - \frac{\pi l}{2} + \delta_l^{(1)}(\chi')\right] + O\left(e^{-\pi r/4}\right), \quad r\chi' \to \infty . \tag{15}$$

Здесь $\delta_l^{(1)}(\chi') = \delta_l^W(\chi') + \delta_l^{V_{l1}}(\chi')$ – полный фазовый сдвиг, отвечающий первому шагу итерации, а $\delta_l^{V_{l1}}(\chi')$ – его приращение, обусловленное компонентой $\varepsilon_{l1}V_{l1}(r)V_{l1}(r')$ сепарабельного взаимодействия, причем функция Йоста $F_l^{(1)}(\chi')$ связана с соответствующим ей фазовым сдвигом $\delta_l^{(1)}(\chi')$ соотношением

$$F_l^{(1)}(\chi') = \left|F_l^{(1)}(\chi')\right|\exp\left[-i\delta_l^{(1)}(\chi')\right], \quad \left|F_l^{(1)}(\chi')\right| = \left|F_l^W(\chi')\right|\cos^{-1}\delta_l^{V_{l1}}(\chi').$$

Более того, функция $\psi_l^{(1)}(r,\chi')$ удовлетворяет условиям ортогональности и полноты:

$$\int_0^\infty dr\psi_l^{(1)}(r,\chi)\psi_l^{(1)^*}(r,\chi') = \begin{cases} \dfrac{\delta(E'-E)}{d\rho_l^{(1)}(E)/dE}, \quad E = \mathrm{ch}\,\chi \ge 1, \quad E' = \mathrm{ch}\,\chi' \ge 1, \\ \left[C_{lj}^{(1)}\right]^{-1}\delta_{jj'}, \ 0 \le E_{tj}^{(1)} = \mathrm{ch}\chi_{tj}^{(1)} < 1, \ 0 \le E_{tj'}^{(1)} = \mathrm{ch}\chi_{tj'}^{(1)} < 1, \\ \chi = \chi_{tj}^{(1)} = i\kappa_{tj}^{(1)}, \quad \chi' = \chi_{tj'}^{(1)} = i\kappa_{tj'}^{(1)}, \quad 0 < \kappa_{tj}^{(1)}, \ \kappa_{tj'}^{(1)} \le \pi/2, \\ j, \quad j' = 1,2,\ldots,\sigma_l^{(1)}, \\ 0, \ E = \mathrm{ch}\chi \ge 1, \ 0 \le E_{tj'}^{(1)} = \mathrm{ch}\,\chi_{tj'}^{(1)} < 1, \ \chi' = \chi_{tj'}^{(1)} = i\kappa_{tj'}^{(1)}, \\ 0 < \kappa_{tj'}^{(1)} \le \pi/2; \end{cases} \tag{16}$$

$$\int_0^\infty d\rho_l^{(1)}(E)\psi_l^{(1)}(r,\chi)\psi_l^{(1)^*}(r',\chi) = \sum_{j=1}^{\sigma_l^{(1)}} C_{lj}^{(1)}\psi_l^{(1)}(r,\chi_{tj}^{(1)})\psi_l^{(1)^*}(r',\chi_{tj}^{(1)}) + \\ + \int_0^\infty d\chi\tau_l^{(1)}(\chi)\psi_l^{(1)}(r,\chi)\psi_l^{(1)^*}(r',\chi) = \delta(r'-r). \tag{17}$$

Но теперь спектральная плотность и нормировочные коэффициенты даются выражениями

$$\frac{d\rho_l^{(1)}(E)}{dE} = \begin{cases} \mathrm{sh}^{-1}\chi\tau_l^{(1)}(\chi), \quad E = \mathrm{ch}\,\chi \ge 1, \\ \sum\limits_{j=1}^{\sigma_l^{(1)}} C_{lj}^{(1)}\delta(E - E_{tj}^{(1)}), \quad 0 \le E = \mathrm{ch}\,\chi < 1, \quad 0 \le E_{tj}^{(1)} = \mathrm{ch}\,\chi_{tj}^{(1)} < 1, \\ \chi = i\kappa, \quad \chi_{tj}^{(1)} = i\kappa_{tj}^{(1)}, \quad 0 < \kappa, \quad \kappa_{tj}^{(1)} \le \pi/2; \end{cases} \tag{18}$$

$$\left[C_{lj}^{(1)}\right]^{-1} = \int_0^\infty dr\left|\psi_l^{(1)}(r,\chi_{tj}^{(1)})\right|^2 = -F_l^{(1)}(-\chi_{tj}^{(1)})\dot{F}_l^{(1)}(\chi_{tj}^{(1)})\Big/\left[4iQ_l^2(\mathrm{cth}\,\chi_{tj}^{(1)})\right], \\ \tau_l^{(1)}(\chi) = \tau_l^{(0)}(\chi)\cos^2\delta_l^{V_{l1}}(\chi), \quad \dot{F}_l^{(1)}(\chi_{tj}^{(1)}) = dF_l^{(1)}(\chi_{tj}^{(1)})\Big/d\chi_{tj}^{(1)}, \quad j = 1,2,\ldots,\sigma_l^{(1)}. \tag{19}$$

Опираясь на результаты работы [18], мы можем заключить, что значения энергий

$$0 \le E_{tj}^{(1)} = \mathrm{ch}\,\chi_{tj}^{(1)} < 1, \quad \chi_{tj}^{(1)} = i\kappa_{tj}^{(1)}, \quad 0 < \kappa_{tj}^{(1)} \le \pi/2, \quad j = 1,2,\ldots,\sigma_l^{(1)}, \tag{20}$$

отвечающих истинным связанным состояниям, обусловлены суперпозицией $W(r)$ и $\varepsilon_{l1}V_{l1}(r)V_{l1}(r')$ и находятся как корни уравнения

$$\Phi_{l1}(E_{tj}^{(1)}) = 0, \ j = 1,2,\ldots,\sigma_l^{(1)}, \quad \sigma_l^{(1)} = \begin{cases} \sigma_l^{(0)} - 1, \ \sigma_l^{(0)}, \ \varepsilon_{l1} = 1, \\ \sigma_l^{(0)}, \ \sigma_l^{(0)} + 1, \ \varepsilon_{l1} = -1. \end{cases} \tag{21}$$

В то же время значения энергий

$$E_{fk}^{(1)} = \mathrm{ch}\,\chi_{fk}^{(1)} \ge 1, \quad k = \begin{cases} 0,1,\ldots,\nu_l^{(1)} - 1, \ \varepsilon_{l1} = 1, \\ 1,2,\ldots,\nu_l^{(1)}, \ \varepsilon_{l1} = -1, \end{cases} \tag{22}$$

отвечающих «поддельным» связанным состояниям, обусловлены компонентой $\varepsilon_{l1}V_{l1}(r)V_{l1}(r')$ сепарабельного взаимодействия и находятся как корни уравнений

$$\begin{cases}\Phi_{l1}(E_{fk}^{(1)})=0,\\ \tilde{V}_{l1}^{(0)}(\chi_{fk}^{(1)})=0,\end{cases}\qquad k=\begin{cases}0,1,...,\nu_l^{(1)}-1, & \varepsilon_{l1}=1,\\ 1,2,...,\nu_l^{(1)}, & \varepsilon_{l1}=-1.\end{cases} \tag{23}$$

Тем самым $\operatorname{tg}\delta_l^{V_{l1}}(\chi)$ обращается в ноль при $\chi=\chi_{fk}^{(1)}$ и меняет знак, т.е.

$$\delta_l^{V_{l1}}(\chi_{fk}^{(1)})=\pi k,\quad \left.\frac{d\delta_l^{V_{l1}}(\chi)}{d\chi}\right|_{\chi=\chi_{fk}^{(1)}}<0,\quad k=\begin{cases}0,1,...,\nu_l^{(1)}-1, & \varepsilon_{l1}=1,\\ 1,2,...,\nu_l^{(1)}, & \varepsilon_{l1}=-1,\end{cases} \tag{24}$$

а теорема Левинсона имеет вид

$$\delta_l^{V_{l1}}(0)=\pi(\sigma_l^{(1)}-\sigma_l^{(0)}+\nu_l^{(1)}). \tag{25}$$

Здесь выбрано $\delta_l^{(1)}(\infty)=0$ и учтена обычная теорема Левинсона для локального квазипотенциала, допускающего $\sigma_l^{(0)}$ связанных состояний: $\delta_l^W(0)=\pi\sigma_l^{(0)}$.

Необходимо отметить, что условия в (7) при $m=1$ обеспечивают существование решения $\psi_l^{(1)}(r,\chi)$ [18]. Действительно, функция $\tilde{V}_{l1}^{(0)}(\chi)$, определяемая соотношениями (12) и (13), всюду непрерывна, а функция $Q_l(\operatorname{cth}\chi)\tilde{V}_{l1}^{(0)}(\chi)\,|\,F_l^W(\chi)|^{-1}$, а значит, и функция $A_{l1}(\chi)$ дифференцируемы при всех $\chi\ge 0$. Более того, из (12) следуют оценки

$$Q_l(\operatorname{cth}\chi)\tilde{V}_{l1}^{(0)}(\chi)\,|\,F_l^W(\chi)|^{-1}=O(1),\ \ |\chi|\to\infty;\ \tilde{V}_{l1}^{(0)}(\chi)=O(1),\ \ \chi\to 0,$$

если только условия (7) при $m=1$ выполняются. Тем самым главные значения интегралов в правых частях формул (14) существуют и абсолютно сходятся на обоих пределах. Тогда из теорем о преобразованиях Гильберта непрерывных по Гельдеру функций следует, что преобразование Гильберта функции $A_{l1}(\chi)$ также является непрерывной по Гельдеру функцией с некоторым положительным индексом. Значит, и приращение фазового сдвига $\delta_l^{V_{l1}}(\chi')$ также обладает этим свойством, так что

$$\delta_l^{V_{l1}}(\chi')=O[(\chi')^{-\gamma}],\ \ |\chi'|\to\infty,\ \gamma>1.$$

Соотношения (16) и (17) обеспечивают продолжение итерационного процесса. Поэтому на произвольном n-м шаге итерации будем искать решение $\psi_l^{(n)}(r,\chi')$ уравнения (3) с взаимодействием, равным суперпозиции $W(r)$ и $\sum_{m=1}^{n}\varepsilon_{lm}V_{lm}(r)V_{lm}(r')$ $(n=1,2,...,M_l)$, удовлетворяющее граничному условию вида (5). При этом будем использовать свойства ортогональности и полноты для решения $\psi_l^{(n-1)}(r,\chi')$, полученного на $(n-1)$-м шаге итерации. Эти свойства имеют вид $(n=1,2,...,M_l)$

$$\int_0^\infty dr\psi_l^{(n-1)}(r,\chi)\psi_l^{(n-1)^*}(r,\chi')=\begin{cases}\dfrac{\delta(E'-E)}{d\rho_l^{(n-1)}(E)/dE}, & E=\operatorname{ch}\chi\ge 1,\quad E'=\operatorname{ch}\chi'\ge 1,\\ \left[C_{lj}^{(n-1)}\right]^{-1}\delta_{jj'}, & 0\le E_{tj}^{(n-1)}=\operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)}<1,\ \ \chi=\chi_{tj}^{(n-1)}=i\kappa_{tj}^{(n-1)},\\ 0\le E_{tj'}^{(n-1)}=\operatorname{ch}\chi_{tj'}^{(n-1)}<1,\ \ \chi'=\chi_{tj'}^{(n-1)}=i\kappa_{tj'}^{(n-1)},\\ 0<\kappa_{tj}^{(n-1)},\ \ \kappa_{tj'}^{(n-1)}\le\pi/2,\quad j,\ \ j'=1,2,...,\sigma_l^{(n-1)},\\ 0,\ E=\operatorname{ch}\chi\ge 1,\ \ 0\le E_{tj'}^{(n-1)}=\operatorname{ch}\chi_{tj'}^{(n-1)}<1,\\ \chi'=\chi_{tj'}^{(n-1)}=i\kappa_{tj'}^{(n-1)},\ \ 0<\kappa_{tj'}^{(n-1)}\le\pi/2;\end{cases} \tag{26}$$

$$\int_0^\infty d\rho_l^{(n-1)}(E)\psi_l^{(n-1)}(r,\chi)\psi_l^{(n-1)^*}(r',\chi) = \sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}} C_{lj}^{(n-1)}\psi_l^{(n-1)}(r,\chi_{tj}^{(n-1)})\psi_l^{(n-1)^*}(r',\chi_{tj}^{(n-1)}) +$$
$$+\int_0^\infty d\chi\tau_l^{(n-1)}(\chi)\psi_l^{(n-1)}(r,\chi)\psi_l^{(n-1)^*}(r',\chi) = \delta(r'-r)\ , \tag{27}$$

причем спектральная плотность и нормировочные константы даются выражениями

$$\frac{d\rho_l^{(n-1)}(E)}{dE} = \begin{cases} \mathrm{sh}^{-1}\chi\tau_l^{(n-1)}(\chi), \ \ E=\mathrm{ch}\,\chi \ge 1, \\ \sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}} C_{lj}^{(n-1)}\delta(E-E_{tj}^{(n-1)}), \ \ 0\le E=\mathrm{ch}\,\chi<1, \ \ 0\le E_{tj}^{(n-1)}=\mathrm{ch}\,\chi_{tj}^{(n-1)}<1, \\ \chi=i\kappa, \ \ \chi_{tj}^{(n-1)}=i\kappa_{tj}^{(n-1)}, \ \ 0<\kappa, \ \ \kappa_{tj}^{(n-1)}\le\pi/2; \end{cases} \tag{28}$$

$$\left[C_{lj}^{(n-1)}\right]^{-1} = \int_0^\infty dr\left|\psi_l^{(n-1)}(r,\chi_{tj}^{(n-1)})\right|^2 = -F_l^{(n-1)}(-\chi_{tj}^{(n-1)})\dot F_l^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})/\left[4iQ_l^2(\mathrm{cth}\,\chi_{tj}^{(n-1)})\right],$$
$$\tau_l^{(n-1)}(\chi)=\tau_l^{(0)}(\chi)\prod_{m=1}^{n-1}\cos^2\delta_l^{V_{lm}}(\chi), \ \ \dot F_l^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)}) = dF_l^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})/d\chi_{tj}^{(n-1)}, \tag{29}$$
$$j=1,2,\ldots,\sigma_l^{(n-1)}, \ n=1,2,\ldots,M_l.$$

Здесь $\delta_l^{V_{lm}}(\chi)$ есть приращение фазового сдвига, обусловленное компонентой $\varepsilon_{lm}V_{lm}(r)V_{lm}(r')$ сепарабельного взаимодействия, причем функция Йоста $F_l^{(n)}(\chi)$, отвечающая n-му шагу итерации, связана с соответствующим ей полным фазовым сдвигом $\delta_l^{(n)}(\chi)$ соотношением

$$F_l^{(n)}(\chi)=\left|F_l^{(n)}(\chi)\right|\exp\left[-i\delta_l^{(n)}(\chi)\right], \ \ \left|F_l^{(n)}(\chi)\right| = \left|F_l^W(\chi)\right|\prod_{m=1}^{n}\cos^{-1}\delta_l^{V_{lm}}(\chi),$$
$$\delta_l^{(n)}(\chi)=\delta_l^W(\chi)+\sum_{m=1}^{n}\delta_l^{V_{lm}}(\chi), \quad n=1,2,\ldots,M_l.$$

Тем самым можно, опираясь на соотношения (26) – (29), ввести релятивистские интегральные преобразования

$$\tilde\psi_l^{(n)}(\chi',\chi)=\int_0^\infty dr\psi_l^{(n)}(r,\chi')\psi_l^{(n-1)^*}(r,\chi), \quad \tilde V_{ln}^{(n-1)}(\chi)=\int_0^\infty drV_{ln}(r)\psi_l^{(n-1)^*}(r,\chi)\,; \tag{30}$$

$$\psi_l^{(n)}(r,\chi')=\int_0^\infty d\rho_l^{(n-1)}(E)\tilde\psi_l^{(n)}(\chi',\chi)\psi_l^{(n-1)}(r,\chi), V_{ln}(r)=\int_0^\infty d\rho_l^{(n-1)}(E)\tilde V_{ln}^{(n-1)}(\chi)\psi_l^{(n-1)}(r,\chi). \tag{31}$$

Тогда, применяя преобразования (31) к уравнению (3) с таким взаимодействием, получим

$$(\mathrm{ch}\,\chi'-\mathrm{ch}\,\chi_{tj}^{(n-1)})\tilde\psi_l^{(n)}(\chi',\chi_{tj}^{(n-1)})=\frac{1}{2}\varepsilon_{ln}N_{ln}(\chi')\tilde V_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)}), \ \ j=1,2,\ldots,\sigma_l^{(n-1)}; \tag{32}$$

$$(\mathrm{ch}\,\chi'-\mathrm{ch}\,\chi)\tilde\psi_l^{(n)}(\chi',\chi)=\frac{1}{2}\varepsilon_{ln}N_{ln}(\chi')\tilde V_{ln}^{(n-1)}(\chi)\,; \tag{33}$$

$$N_{ln}(\chi')=\int_0^\infty dr'V_{ln}(r')\psi_l^{(n)}(r',\chi')=\int_0^\infty d\rho_l^{(n-1)}(E)\tilde\psi_l^{(n)}(\chi',\chi)\tilde V_{ln}^{(n-1)^*}(\chi), \ \ n=1,2,\ldots,M_l. \tag{34}$$

Теперь заметим, что в силу условий (7) имеет место асимптотика

$$\psi_l^{(n)}(r,\chi')=\frac{|F_l^{(n)}(\chi')|}{Q_l(\mathrm{cth}\,\chi')}\sin\left[r\chi'-\frac{\pi l}{2}+\delta_l^{(n)}(\chi')\right]+O\left(e^{-\pi r/4}\right), n=1,2,\ldots,M_l, \, r\chi'\to\infty. \tag{35}$$

Кроме того, функция $\tilde V_{ln}^{(n-1)}(\chi)$ всюду непрерывна, а функция $Q_l(\mathrm{cth}\,\chi)\,|\,F_l^{(n-1)}(\chi)\,|^{-1}\,\tilde V_{ln}^{(n-1)}(\chi)$ дифференцируема при всех $\chi\ge 0$. Более того, из (30) следуют оценки

$$Q_l(\operatorname{cth}\chi)\,|\,F_l^{(n-1)}(\chi)\,|^{-1}\,\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)=O(1),\ |\,\chi\,|\to\infty;\ \ \tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)=O(1),\ \ \chi\to 0,\ \ n=1,2,...,M_l, \tag{36}$$

если только условия (7) выполнены, т.е. как это имеет место и в случае одного сепарабельного члена.

Для состояний рассеяния ($E'=\operatorname{ch}\chi'\geq 1$) решения уравнений (32) и (33) имеют вид[3]

$$\tilde{\psi}_l^{(n)}(\chi',\chi_{tj}^{(n-1)})=\frac{1}{2}\varepsilon_{ln}N_{ln}(\chi')\frac{\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})}{\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)}},\ \ j=1,2,..,\sigma_l^{(n-1)}; \tag{37}$$

$$\tilde{\psi}_l^{(n)}(\chi',\chi)=\frac{\delta(\operatorname{ch}\chi-\operatorname{ch}\chi')}{d\rho_l^{(n-1)}(\operatorname{ch}\chi)/d(\operatorname{ch}\chi)}+\frac{1}{2}\varepsilon_{ln}N_{ln}(\chi')P\frac{\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)}{\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi},\ \ n=1,2,...,M_l. \tag{38}$$

Подстановка решений (37) и (38) в представление (31) для $\psi_l^{(n)}(r,\chi')$ и (34) дает

$$\begin{gathered}\psi_l^{(n)}(r,\chi')=\psi_l^{(n-1)}(r,\chi')+\frac{1}{2}\varepsilon_{ln}N_{ln}(\chi')\sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}}C_{lj}^{(n-1)}\frac{\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\psi_l^{(n-1)}(r,\chi_{tj}^{(n-1)})}{\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)}}+\\+\frac{1}{2}\varepsilon_{ln}N_{ln}(\chi')P\int_0^\infty d\chi\frac{\tau_l^{(n-1)}(\chi)\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)\psi_l^{(n-1)}(r,\chi)}{\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi};\end{gathered} \tag{39}$$

$$N_{ln}(\chi')=\varepsilon_{ln}\tilde{V}_{ln}^{(n-1)^*}(\chi')/\Phi_{ln}(\operatorname{ch}\chi'); \tag{40}$$

$$\Phi_{ln}(\operatorname{ch}\chi')=\varepsilon_{ln}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}}C_{lj}^{(n-1)}\frac{\left|\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\right|^2}{\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)}}-\frac{1}{2}P\int_0^\infty d\chi\frac{|\,A_{ln}(\chi)\,|}{\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi}; \tag{41}$$

$$A_{ln}(\chi)=\varepsilon_{ln}\tau_l^{(n-1)}(\chi)\left|\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)\right|^2,\ \ \ n=1,2,...,M_l. \tag{42}$$

При этом главные значения интегралов в (39) и (41) существуют, поскольку функция $\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)$, а значит, и функция $A_{ln}(\chi)$ дифференцируемы, а в силу условий (36) они также сходятся и на обоих пределах. Тогда из теорем о преобразованиях Гильберта непрерывных по Гельдеру функций следует, что преобразование Гильберта функции $A_{ln}(\chi)$ также является непрерывной по Гельдеру функцией с некоторым положительным индексом. Значит, и приращение фазового сдвига $\delta_l^{V_{ln}}(\chi')$ также обладает этим свойством, так что

$$\delta_l^{V_{ln}}(\chi')=O[(\chi')^{-\gamma}],\ \ |\chi'|\to\infty,\ \gamma>1,\ \ n=1,2,...,M_l.$$

Далее, используя асимптотику (35) для $\psi_l^{(n-1)}(r,\chi')$ и четность подынтегральной функции в выражении (39), представим его в виде $(r\to\infty)$

$$\begin{gathered}\psi_l^{(n)}(r,\chi')=\frac{\left|F_l^{(n-1)}(\chi')\right|}{Q_l(\operatorname{cth}\chi')}\sin\left[r\chi'-\frac{\pi l}{2}+\delta_l^{(n-1)}(\chi')\right]+\\+\frac{1}{2}\varepsilon_{ln}N_{ln}(\chi')\sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}}C_{lj}^{(n-1)}\frac{\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\psi_l^{(n-1)}(r,\chi_{tj}^{(n-1)})}{\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)}}+\\+\varepsilon_{ln}N_{ln}(\chi')P\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}d\chi\frac{Q_l(\operatorname{cth}\chi)\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)\exp\left[i(r\chi-\pi l/2)\right]}{F_l^{(n-1)}(\chi)(\operatorname{ch}\chi'-\operatorname{ch}\chi)}+O\left(e^{-\pi r/4}\right).\end{gathered} \tag{43}$$

Интеграл в последнем выражении легко вычисляется применением равенства

[3] Отметим, что множитель при δ-функции, как и на первом шаге итерации, выбран в соответствии с нормировкой волновой функции: на n-м шаге итерации при $\varepsilon_{ln}\equiv 0$ представление (31) для $\psi_l^{(n)}(r,\chi')$ должно приводить к регулярному решению $\psi_l^{(n-1)}(r,\chi')$ $(n=1,2,...,M_l)$.

$$\frac{1}{\alpha - i\eta} = i\pi\delta(\alpha) + P\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad \eta \to +0$$

и основной теоремы вычетов при интегрировании по границе полосы $0 \le \operatorname{Im}\chi \le \pi/2$:

$$P\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\chi \frac{Q_l(\operatorname{cth}\chi)\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)\exp\left[i(r\chi - \pi l/2)\right]}{F_l^{(n-1)}(\chi)(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi)} =$$

$$= -\frac{Q_l(\operatorname{cth}\chi')\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi')}{\left|F_l^{(n-1)}(\chi')\right|\operatorname{sh}\chi'}\cos\left[r\chi' - \frac{\pi l}{2} + \delta_l^{(n-1)}(\chi')\right] +$$

$$+\sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}} \frac{Q_l(\operatorname{cth}\chi_{tj}^{(n-1)})\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\exp\left[i(r\chi_{tj}^{(n-1)} - \pi l/2)\right]}{\dot{F}_l^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)})} + O\left(e^{-\pi r/4}\right), \quad r \to \infty.$$

Тогда, учитывая последний результат и соотношение (29), а также принимая во внимание поведение функции $\psi_l^{(n-1)}(r,\chi_{tj}^{(n-1)})$[4], асимптотика функции (43) дается выражением

$$\psi_l^{(n)}(r,\chi') = \frac{\left|F_l^{(n-1)}(\chi')\right|}{Q_l(\operatorname{cth}\chi')}\sin\left[r\chi' - \frac{\pi l}{2} + \delta_l^{(n-1)}(\chi')\right] -$$

$$-\frac{\varepsilon_{ln}N_{ln}(\chi')Q_l(\operatorname{cth}\chi')\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi')}{\left|F_l^{(n-1)}(\chi')\right|\operatorname{sh}\chi'}\cos\left[r\chi' - \frac{\pi l}{2} + \delta_l^{(n-1)}(\chi')\right] + O\left(e^{-\pi r/4}\right), \tag{44}$$

$$n = 1, 2, \ldots, M_l, \; r\chi' \to \infty.$$

Наконец, асимптотика (44) принимает вид (35), если учесть выражения (40), (42) и положить

$$\operatorname{tg}\delta_l^{V_{ln}}(\chi') = -(\pi/2)\varepsilon_{ln}\operatorname{sh}^{-1}\chi' A_{ln}(\chi')/\Phi_{ln}(\operatorname{ch}\chi'), \quad n = 1, 2, \ldots, M_l. \tag{45}$$

2. Связанные состояния и теорема Левинсона

Предположим, что существует хотя бы одно связанное состояние с энергией $E^{(n)} = \operatorname{ch}\chi^{(n)} \ge 0$ $(n = 1, 2, \ldots, M_l)$. Тогда решения уравнений (32) и (33) имеют вид

$$\tilde{\psi}_l^{(n)}\left(\chi^{(n)}, \chi_{tj}^{(n-1)}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ln}N_{ln}\left(\chi^{(n)}\right)\frac{\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}\left(\chi_{tj}^{(n-1)}\right)}{\operatorname{ch}\chi^{(n)} - \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)}}, \quad j = 1, 2, \ldots, \sigma_l^{(n-1)}; \tag{46}$$

$$\tilde{\psi}_l^{(n)}\left(\chi^{(n)}, \chi\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ln}N_{ln}\left(\chi^{(n)}\right)P\frac{\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)}{\operatorname{ch}\chi^{(n)} - \operatorname{ch}\chi}, \quad n = 1, 2, \ldots, M_l. \tag{47}$$

Подстановка этих решений в соотношения (34) приводит к уравнениям на собственные значения

$$\Phi_{ln}\left(E^{(n)}\right) = \varepsilon_{ln} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}} C_{lj}^{(n-1)}\frac{\left|\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\right|^2}{E^{(n)} - E_{tj}^{(n-1)}} - \frac{1}{2}P\int_0^{\infty} d\chi \frac{\left|A_{ln}(\chi)\right|}{E^{(n)} - \operatorname{ch}\chi} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, M_l, \tag{48}$$

которые имеют решения при $\varepsilon_{ln} = \pm 1$. При этом значениям энергий

$$E_{fk}^{(n)} = \operatorname{ch}\chi_{fk}^{(n)} \ge 1, \quad k = \begin{cases} 0, 1, \ldots, \nu_l^{(n)} - 1, & \varepsilon_{ln} = 1, \\ 1, 2, \ldots, \nu_l^{(n)}, & \varepsilon_{ln} = -1, \quad n = 1, 2, \ldots, M_l, \end{cases} \tag{49}$$

---

[4] Здесь имеется в виду, что поскольку значениям $\chi_{tj}^{(n-1)} (j = 1, 2, \ldots, \sigma_l^{(n-1)})$ соответствуют истинные связанные состояния с энергиями $E_{tj}^{(n-1)} = \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)}$, $\chi_{tj}^{(n-1)} = i\kappa_{tj}^{(n-1)}$, $0 < \kappa_{tj}^{(n-1)} \le \pi/2$, то $F_l^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)}) = 0$, а следовательно, при $r \to \infty$

$$\psi_l^{(n-1)}(r, \chi_{tj}^{(n-1)}) = F_l^{(n-1)}(-\chi_{tj}^{(n-1)})\exp[i(r\chi_{tj}^{(n-1)} - \pi l/2)]/[2iQ_l(\operatorname{cth}\chi_{tj}^{(n-1)})], \; j = 1, 2, \ldots, \sigma_l^{(n-1)}, \; n = 1, 2, \ldots, M_l.$$

Это приводит к сокращению вкладов в асимптотику волновой функции $\psi_l^{(n)}(r,\chi')$, обусловленных этими связанными состояниями.

обусловленных n-компонентным сепарабельным взаимодействием в каждой парциальной волне, отвечают «поддельные» связанные состояния. В то же время значениям энергий

$$0 \le E_{tj}^{(n)} = \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n)} < 1,\ \chi_{tj}^{(n)} = i\kappa_{tj}^{(n)},\ 0 < \kappa_{tj}^{(n)} \le \pi/2,\ j = 1,2,\ldots,\sigma_l^{(n)},\ n = 1,2,\ldots,M_l, \tag{50}$$

обусловленных полным взаимодействием, соответствуют истинные связанные состояния.

Для «поддельных» связанных состояний с энергиями (49), значения которых $E_{fk}^{(n)}$ определяются как корни уравнений (48), асимптотика волновой функции на каждом шаге итерации дается выражением (44) с опущенным первым членом, т.е.

$$\psi_l^{(n)}(r,\chi_{fk}^{(n)}) = -\frac{\varepsilon_{ln}N_{ln}(\chi_{fk}^{(n)})Q_l(\operatorname{cth}\chi_{fk}^{(n)})\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{fk}^{(n)})}{\left|F_l^{(n-1)}(\chi_{fk}^{(n)})\right|\operatorname{sh}\chi_{fk}^{(n)}}\cos\left[r\chi_{fk}^{(n)} - \frac{\pi l}{2} + \delta_l^{(n-1)}(\chi_{fk}^{(n)})\right] + O\left(e^{-\pi r/4}\right),$$
$$n = 1,2,\ldots,M_l, \quad r \to \infty.$$

Отсюда следует, что волновая функция $\psi_l^{(n)}(r,\chi_{fk}^{(n)})$ асимптотически стремится к нулю, если только

$$\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}\left(\chi_{fk}^{(n)}\right) = 0, \quad k = \begin{cases} 0,1,\ldots,\nu_l^{(n)}-1, & \varepsilon_{ln} = 1, \\ 1,2,\ldots,\nu_l^{(n)}, & \varepsilon_{ln} = -1, \quad n = 1,2,\ldots,M_l. \end{cases} \tag{51}$$

При этом граничные условия вида (5) также выполняются. Следовательно, энергиям (49) отвечают «поддельные» связанные состояния, обусловленные n-компонентным сепарабельным взаимодействием, и даются общими корнями уравнений (48) и (51). Более того, при таких значениях энергий в силу условий (48) и (51) равны нулю как числитель, так и знаменатель в правой части равенств (45). Однако из определений (42) следует, что функции $A_{ln}(\chi')$ имеют в точках $\chi_{fk}^{(n)}$ по крайней мере нуль второго порядка. В то же время знаменатель в (45) имеет в этих точках только простой нуль, поскольку

$$\left.\frac{d\Phi_{ln}(\operatorname{ch}\chi')}{d\chi'}\right|_{\chi'=\chi_{fk}^{(n)}} = \frac{\operatorname{sh}\chi_{fk}^{(n)}}{2}\left[\sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}} C_{lj}^{(n-1)} \frac{\left|\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\right|^2}{\left(\operatorname{ch}\chi_{fk}^{(n)} - \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)}\right)^2} + P\int_0^\infty d\chi \frac{\left|A_{ln}(\chi)\right|}{\left(\operatorname{ch}\chi_{fk}^{(n)} - \operatorname{ch}\chi\right)^2}\right] > 0.$$

Отсюда следует, что приращения $\delta_l^{V_{ln}}(\chi')$ фазы рассеяния проходят при возрастании χ' через значения πk, убывая, т.е.

$$\delta_l^{V_{ln}}\left(\chi_{fk}^{(n)}\right) = \pi k, \quad \left.\frac{d\delta_l^{V_{ln}}(\chi')}{d\chi'}\right|_{\chi'=\chi_{fk}^{(n)}} < 0, \quad k = \begin{cases} 0,1,\ldots,\nu_l^{(n)}-1, & \varepsilon_{ln} = 1, \\ 1,2,\ldots,\nu_l^{(n)}, & \varepsilon_{ln} = -1, \end{cases} \quad n = 1,2,\ldots,M_l. \tag{52}$$

Если же знаменатель в (45) не обращается в нуль при $\chi' = \chi_{fk}^{(n)}$, то приращения фазового сдвига будут только касаться прямых $\delta_l^{V_{ln}} = \pi k$ (k – целое) сверху или снизу, но не пересекать их. Кроме того, в силу оценки (36) из выражений (45) легко находим, что $\operatorname{tg}\delta_l^{V_{ln}}(\infty) = 0$. Следовательно, можно, как обычно [17, 18], выбрать

$$\delta_l^{V_{ln}}(\infty) = 0, \quad n = 1,2,\ldots,M_l. \tag{53}$$

Отметим, что, исследуя поведение приращений $\delta_l^{V_{ln}}(\chi')$ при возрастании χ', можно определить как значения энергий $E_{fk}^{(n)}$, так и знак величин ε_{ln}. При этом их знак обратен знаку приращений $\delta_l^{V_{ln}}(\chi')$ фазового сдвига при высоких энергиях ($\chi' \to +\infty$).

Теперь рассмотрим условия существования истинных связанных состояний с энергиями (50), значения которых $E_{tj}^{(n)}$ находятся как корни уравнений (48). Тогда граничные условия вида (5) выполняются, а асимптотика волновой функции стремится к нулю при $r \to \infty$ [5]. При этом число $\sigma_l^{(n)}$ истинных связанных состояний, как и для однокомпонентного сепарабельного взаимодействия [18], определяется значениями величин ε_{ln} и $\Phi_{ln}(1)$. Тем самым возможны два случая.

1) Если $\varepsilon_{ln} = 1$, то $\Phi_{ln}(0) > 1$. Это соответствует выбору верхней полы ($E_{q'} \geq 0$) массового гиперболоида $E_{q'}^2 - \boldsymbol{q}'^2 = m'^2$. При этом, если $\Phi_{ln}(1) > 0$, то уравнение (48) имеет $\sigma_l^{(n)} = \sigma_l^{(n-1)}$ корней $E_{tj}^{(n)}$, что отвечает слабой нелокальности n-й компоненты сепарабельного взаимодействия. Если же $\Phi_{ln}(1) < 0$, то уравнение (48) будет иметь $\sigma_l^{(n)} = \sigma_l^{(n-1)} - 1$ корней $E_{tj}^{(n)}$, что соответствует сильной нелокальности. Кроме того, значения $E_{tj}^{(n)}$ больше соответствующих значений $E_{tj}^{(n-1)}$ $(j = 1, 2, ..., \sigma_l^{(n-1)},\ \ n = 1, 2, ..., M_l)$. Тем самым n-я компонента сепарабельного взаимодействия является отталкивающей и в зависимости от его величины может устранить одно связанное состояние, причем значение $\Phi_{ln}(1)$ отвечает за величину его нелокальности.

2) Если $\varepsilon_{ln} = -1$, то уравнение (48) теперь имеет решения при $\Phi_{ln}(0) \leq 0$. При этом, если $\Phi_{ln}(1) < 0$, то n-я компонента сепарабельного взаимодействия обладает слабой нелокальностью притягивающего типа. Тем самым $\sigma_l^{(n)} = \sigma_l^{(n-1)}$, причем $E_{tj}^{(n)} < E_{tj}^{(n-1)}$. Если же $\Phi_{ln}(1) > 0$, то теперь n-я компонента сепарабельного взаимодействия обладает сильной нелокальностью притягивающего типа. Это ведет не только к уменьшению значений энергий связанных состояний $E_{tj}^{(n)}$, но и, будучи сильным, способно привести к образованию еще одного связанного состояния ($\sigma_l^{(n)} = \sigma_l^{(n-1)} + 1$) с энергией $E_{t(\sigma_l^{(n-1)}+1)}^{(n)} > E_{tj}^{(n-1)} > E_{tj}^{(n)}$ $\quad (j = 1, 2, ..., \sigma_l^{(n-1)},\ \ n = 1, 2, ..., M_l)$. Следовательно, эффективную частицу массы m' в этом случае можно считать «квазилокальной», а значение $\Phi_{ln}(1)$ по-прежнему будет отвечать за величину нелокальности.

До сих пор предполагалось, что $\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)}) \neq 0$ и $\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi) \neq 0$ $\quad (j = 1, 2, ..., \sigma_l^{(n-1)}$, $n = 1, 2, ..., M_l)$. Допустим, что теперь одно из $\left\{\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\right\}$ равно нулю, например $\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tk}^{(n-1)})$. Тогда функция $\Phi_{ln}(E)$ является непрерывной при $E = E_{tk}^{(n-1)}$, а следовательно, значение $E_{tk}^{(n)}$ будет отсутствовать. Кроме того, собственное значение $E_{tk}^{(n)}$ в этом случае замещается значением $E_{tk}^{(n-1)}$. Собственная волновая функция $\psi_l^{(n)}(r, \chi_{tk}^{(n)})$ будет совпадать с волновой функцией $\psi_l^{(n-1)}(r, \chi_{tk}^{(n-1)})$. Тем самым $V_{ln}(r)$ ортогонально $\psi_l^{(n-1)}(r, \chi_{tk}^{(n-1)})$, а суперпозиция $\varepsilon_{ln} V_{ln}(r) V_{ln}(r')$ и суммы $W(r)$ и $\sum\limits_{m=1}^{n-1} \varepsilon_{lm} V_{lm}(r) V_{lm}(r')$ не изменяет волновой функции $\psi_l^{(n-1)}(r, \chi_{tk}^{(n-1)})$ и ее собственного значения энергии $E_{tk}^{(n-1)}$. Более того, по этой же причине собственное значение энергии $E_{t(k+1)}^{(n)}$ будет равно значению $E_{tk}^{(n-1)}$. Это означает, что при энергии $E_{tk}^{(n-1)}$ имеет место вырождение. Поэтому волновую функцию $\psi_l^{(n)}(r, \chi_{t(k+1)}^{(n)})$ можно выбрать ортогональной волновой функции $\psi_l^{(n-1)}(r, \chi_{tk}^{(n-1)})$, полагая $\tilde{\psi}_l^{(n)}(\chi_{t(k+1)}^{(n)}, \chi_{tk}^{(n-1)}) \equiv 0$. Случаи, когда несколько значений из $\left\{\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\right\}$ равны нулю, исследуются аналогично, причем степень вырождения для каждого

[5] Действительно, асимптотика волновой функции на каждом шаге итерации имеет вид

$$\psi_l^{(n)}(r, \chi_{tj}^{(n)}) = O(\exp[-r \min(\kappa_{tj}^{(n)}, \pi/4)]), \quad 0 < \kappa_{tj}^{(n)} \leq \pi/2,\ j = 1, 2, ..., \sigma_l^{(n)},\ \ n = 1, 2, ... M_l, \quad r \to \infty.$$

Эта асимптотика может быть легко найдена путем подстановки решений (46) и (47) в представление (31) для $\psi_l^{(n)}(r, \chi')$, использования выражения (29), асимптотики (35) для $\psi_l^{(n-1)}(r, \chi')$ и последующей интеграции с помощью основной теоремы вычетов по границе полосы $0 \leq \operatorname{Im}\chi \leq \pi/2$. Кроме того, принято во внимание поведение функции $\psi_l^{(n-1)}(r, \chi_{ij}'^{(n-1)})$, отмеченное в сноске 3.

значения $E_{tj}^{(n-1)}$ не может быть больше двух. Более того, хотя бы одно из $\left\{\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\right\}$ не равно нулю, так как $d\Phi_{ln}(E)/dE > 0$ при $0 \le E \le 1$, $E \ne E_{tj}^{(n-1)}$ [6].

Далее, из условия ортогональности (26) и представления (30) для $\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi) \equiv 0$ следует, что

$$V_{ln}(r) = \sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}} a_{lj}^{(n-1)} \psi_l^{(n-1)}(r, \chi_{tj}^{(n-1)}).$$

В этом случае уравнение (48) принимает вид

$$\Phi_{ln}\left(E^{(n)}\right) = \varepsilon_{ln} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}} C_{lj}^{(n-1)} \frac{\left|\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\right|^2}{E^{(n)} - E_{tj}^{(n-1)}} = 0, \; n = 1, 2, ..., M_l,$$

однако оно имеет не более чем $\sigma_l^{(n-1)}$ корней $E_{tj}^{(n)}$, так как $\Phi_{ln}(0) > \varepsilon_{ln}$, а $\Phi_{ln}(1) < \varepsilon_{ln}$. По этой же причине волновые функции связанных состояний $\psi_l^{(n)}(r, \chi_{tj}^{(n)})$ будут являться линейными комбинациями волновых функций $\psi_l^{(n-1)}(r, \chi_{tj}^{(n-1)})$, а волновая функция состояний рассеяния $\psi_l^{(n)}(r, \chi)$ будет совпадать с волновой функцией $\psi_l^{(n-1)}(r, \chi)$. В то же время энергии связанных состояний изменяются, причем из выражения (45) следует $\delta_l^{V_{ln}}(\chi) \equiv 0$.

Наконец, суммируя полученные результаты, можно заключить, что функция Йоста $F_l^{(n)}(\chi)$ является аналитической в полосе $0 \le \mathrm{Im}\,\chi \le \pi/2$, имеет там $\sigma_l^{(n)}$ простых нулей (50) ($\sigma_l^{(n)} = \sigma_l^{(n-1)} \pm 1$ или $\sigma_l^{(n-1)}$), причем $F_l^{(n)}(\chi_{tj}^{(n)}) = 0$ $(j = 1, 2..., \sigma_l^{(n)},\; n = 1, 2, ..., M_l)$, и не имеет полюсов. Поэтому можно воспользоваться подходом, изложенным в работе [18]. Тогда, учитывая вклад в вариацию фазового сдвига $\delta_l^{(n)}(\chi)$ от $\nu_l^{(n)}$ «поддельных» связанных состояний (свойство (52)) и его нечетность, а также принимая во внимание условие (53), приходим к теореме Левинсона

$$\delta_l^{V_{ln}}(0) = \pi(\sigma_l^{(n)} - \sigma_l^{(n-1)} + \nu_l^{(n)}), \tag{54}$$

где

$$\sigma_l^{(n)} = \begin{cases} \sigma_l^{(n-1)} - 1, \; \sigma_l^{(n-1)} & \text{при } \varepsilon_{ln} = 1, \\ \sigma_l^{(n-1)}, \; \sigma_l^{(n-1)} + 1 & \text{при } \varepsilon_{ln} = -1, \; n = 1, 2, ..., M_l. \end{cases}$$

Подчеркнем, что $\delta_l^{V_{ln}}(0) \ge 0$, за исключением тех случаев, когда $\delta_l^{V_{ln}}(0) = -\pi$ $(\varepsilon_{ln} = -1)$. А это имеет место при $\sigma_l^{(n-1)} \ne 0$, $\sigma_l^{(n)} = \sigma_l^{(n-1)} - 1$ и $\nu_l^{(n)} = 0$.

Заключение

В данной работе получено решение конечно-разностного квазипотенциального уравнения с полным квазипотенциалом, описывающим взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс. При этом полное взаимодействие считается центрально-симметричным, не

---

[6] Однако это обстоятельство не будет иметь места при и $\varepsilon_{ln} = -1$. В этом случае $\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{t1}^{(n-1)}) = 0$, а уравнение (48) принимает вид

$$\Phi_{ln}(E^{(n)}) = -1 - \frac{1}{2} P \int_0^\infty d\chi \frac{\left|A_{ln}(\chi)\right|}{E^{(n)} - \mathrm{ch}\,\chi} = 0, \quad n = 1, 2, ..., M_l, \quad \sigma_l^{(n-1)} = 1,$$

причем это уравнение имеет единственный корень $E^{(n)} = E_{t1}^{(n)}$, если

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\chi \prod_{m=1}^{n-1} \cos^2 \delta_l^{V_{lm}}(\chi) \left|\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi) / F_l^W(\chi)\right|^2 > 1, \quad n = 1, 2, ..., M_l.$$

Последнее условие вызвано тем, что для любых l, $\chi \ge 0$ функция $g_l(\chi)$ является ограниченной:

$$g_l(\chi) = \frac{1}{2} \frac{Q_l^2(\mathrm{cth}\,\chi)}{\mathrm{ch}\,\chi - E_{t1}^{(n)}} \le \max g_l(\chi) \approx \frac{\pi(\mathrm{th}\,\chi_{\max})^{2l}}{4^{l+1}\,\mathrm{ch}\,\chi_{\max}} \left[1 - \frac{l+1}{2l+3} \mathrm{th}^2 \chi_{\max}\right] < 1.$$

зависит от энергии и представляет собой суперпозицию локального и суммы нелокальных сепарабельных квазипотенциалов. Рассмотрение проведено в рамках релятивистского квазипотенциального подхода в квантовой теории поля. В основу предложенного здесь метода решения квазипотенциального уравнения положены свойства ортогональности и полноты для парциальной волновой функции локального квазипотенциала, считающегося известным и согласующимся с экспериментальными данными при низких энергиях. Было показано, что парциальные волновые функции суперпозиции локального и n-компонентного нелокального сепарабельного квазипотенциалов также удовлетворяют свойствам ортогональности и полноты, что и обеспечило итерационный процесс. Это позволило найти выражения для приращений фазового сдвига и исследовать их свойства, определить условия существования истинных и «поддельных» связанных состояний и дать обобщение теоремы Левинсона.

Автор выражает искреннюю благодарность Ю.С. Вернову, М.Н. Мнацакановой и А.М. Широкову за проявленный интерес к работе и полезное обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gourdin M. and Martin A. // Nuovo Cimento. – 1957. – V. 6. – P. 757–773; 1958. – V. 8. – P. 699–715.
2. Chadan K. // Ibid. – 1958. – V. 10. – P. 892-908; – 1967. – V. A.157. – P. 510–525.
3. Bolsterli M. and MacKenzie J. // Physics (N.Y.). – 1965. – V. 2. – P. 141–149.
4. Tabakin F. // Phys. Rev. – 1969. – V. 177. – P. 1443–1451.
5. Mills R.L. and Reading J.F. // J. Math. Phys. (N.Y.). – 1969. – V. 10. – P. 321–331.
6. Barbieri R., Kögerler R., Kunszt Z., and Gatto R. // Nucl. Phys. B. – 1976. – V. 105. – P. 125–138.
7. McClary R. and Byers N. // Phys. Rev. D. – 1983. – V. 28. – P. 1692–1705.
8. Logunov A.A. and Tavkhelidze A.N. // Nuovo Cimento. – 1963. – V. 29. – P. 380–400.
9. Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. // ЯФ. – 1979. – Т. 30. – С. 1079–1088; 1980. – Т. 31. – С. 1332–1341; ТМФ. – 1980. – Т. 43. – С. 330–342.
10. Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н. // ТМФ. – 1985. – Т. 64. – С. 179–187; ЯФ. – 1998. – Т. 61. – С. 534–539; 2000. – Т. 63. – С. 915–919; 2001. – Т. 64. – С. 1358–1363.
11. Бойкова Н.А., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н. // ЯФ. – 2001. – Т. 64. – С. 986–989.
12. Kapshai V.N. and Alferova T.A. // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – V. 32. – P. 5329–5334.
13. Kadyshevsky V.G. // Nucl. Phys. B. – 1968. – V. 6. – P. 125–148.
14. Кадышевский В.Г., Матеев М.Д., Мир-Касимов Р.М. // ЯФ. – 1970. – Т. 11. – С. 692–700.
15. Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. // ТМФ. – 1979. – Т. 41. – С. 205–219.
16. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. // Nuovo Cimento A. – 1968. – V. 55. – P. 233–257; ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2. – С. 635–690.
17. Черниченко Ю.Д. // ЯФ. – 2000. – Т. 63. – С. 2068–2074.
18. Черниченко Ю.Д. // Там же. – 2004. – Т. 67. – С. 433–442.
19. Freeman M., Mateev M.D., and Mir-Kasimov R.M. // Nucl. Phys. B. – 1969. – V. 12. – P. 197–215.
20. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. // ЯФ. – 1969. – Т. 9. – С. 462–471.
21. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Фриман М. // Там же. – 1969. – Т. 9. – С. 646–652.
22. Бейтмен Г., Эрдейи А. // Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1974.

Гомельский государственный технический университет
им. П.О. Сухого, г. Гомель, Республика Беларусь
E-mail: chern@gstu.gomel.by; chern@server.by

Поступила в редакцию 10.11.09.

Черниченко Юрий Дмитриевич, к.ф.-м.н., доцент каф. высшей математики.