ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 55, № 6 ФИЗИКА 2012

УДК 539.12

Ю.Д. ЧЕРНИЧЕНКО

О РЕШЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СУММЫ НЕЛОКАЛЬНЫХ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ КВАЗИПОТЕНЦИАЛОВ

Решена релятивистская обратная задача для случая, когда полный квазипотенциал, описывающий взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс, представляет собой суперпозицию локального и суммы нелокальных сепарабельных квазипотенциалов. Рассмотрение проведено в рамках релятивистского квазипотенциального подхода в квантовой теории поля. Локальная составляющая полного взаимодействия предполагается известной и допускающей существование связанных состояний. Показано, что компоненты нелокальной сепарабельной составляющей полного взаимодействия могут быть восстановлены, если его локальная часть, приращения фазового сдвига и значения энергий связанных состояний известны.

Ключевые слова: *релятивистская обратная задача, квантовая теория поля, релятивистский квазипотенциальный подход, нелокальные сепарабельные квазипотенциалы.*

Введение

Существует ряд подходов к задаче восстановления потенциалов взаимодействия между элементарными частицами. Широкое распространение получил феноменологический подход [1], основанный на использовании потенциалов, содержащих варьируемые параметры, которые подбираются из условия соответствия экспериментальным данным. Иная возможность восстановления потенциала взаимодействия основана на результатах, полученных при решении обратной задачи.

Принципиальная возможность решения обратной задачи в нерелятивистской теории была доказана И.М. Гельфандом и Б.М. Левитаном [2], В.А. Марченко [3] и М.Г. Крейном [4]. Полученные ими два варианта линейных интегральных уравнений, один из которых был дан Гельфандом и Левитаном, а другой – Марченко, послужили основой дальнейшего развития теории обратной задачи. В систематизированном виде эти результаты впервые были кратко изложены в обзорах З.С. Аграновича и В.А. Марченко [5] и Л.Д. Фаддеева [6]. Последующим исследованием обратной задачи в различных ее постановках занимались многие авторы, а литература, посвященная этой проблеме, и приложения результатов – весьма обширны [7–11]. Наиболее полный обзор по теории обратной задачи дан в монографии [12]. В ней единым образом изложены методы получения информации о центрально-симметричном потенциале по данным рассеяния, зависящим как от энергии E, так и от орбитального момента l при фиксированном значении энергии E. Рассмотрены обобщения теории на случай поля произвольной формы, а также решения обратной задачи на основе релятивистских уравнений Дирака и Клейна – Гордона. Большое место отводится различным приближенным методам обратной задачи и анализу возникающих при этом неоднозначностей решений.

Широкое применение получил дискретный подход к обратной задаче, опирающийся на конечно-разностное приближение к уравнению Шредингера. Наиболее полно подход к обратной задаче, основанный на конечно-разностных уравнениях Шредингера (одномерных, одноканальных, многоканальных, многомерных), изложен в [13].

Представляет интерес и общее решение многоканальной обратной задачи рассеяния на основе многоканальной матрицы [14] в последовательном формализме релятивистской квантовой механики, предложенном в [15].

Однако задача восстановления взаимодействия в большинстве этих и ряде других работ формулируется на основе нерелятивистского уравнения Шредингера. Тем самым остается актуальной задача восстановления взаимодействия для существенно релятивистских систем. Для таких систем, в частности образованных легкими кварками, вклад релятивистских поправок к гамильтониану взаимодействия сравним с основным нерелятивистским членом. Необходимость релятивистского описания также возникает и при рассмотрении радиационных распадов мезонов и нуклонных резонансов, когда энергия излучаемого фотона сравнима или даже больше массы составляющих их кварков. Тем самым кварк, взаимодействующий с фотоном, неизбежно оказывается релятивистским. При этом одноглюонный обмен между кварками на малых расстояниях в соответствии с квантовой хромодинамикой индуцирует кулоновский член. В то же время на больших расстояниях форма запирающего члена, существенно влияющая на спектральные свойства связанных систем, из-за отсутствия в настоящее время эффективных методов расчета вне рамок теории возмущений квантовой хромодинамикой не определяется. В ядерной физике и в проблеме многих тел, например при решении уравнений Фаддеева в задаче трех тел, успешно используются нелокальные сепарабельные двухчастичные взаимодействия. Необходимость такого представления взаимодействия двухчастичной системы вызвана, в частности, предположением мезонной теории ядерных сил. В соответствии с этой теорией взаимодействие между двумя нуклонами является локальным на больших расстояниях, но становится нелокальным и сингулярным на малых расстояниях. При этом будем считать, что локальная часть $W(r)$ полного взаимодействия является известной и согласуется с экспериментальными данными при низких энергиях. В то же время на малых расстояниях нелокальную составляющую полного взаимодействия, исходя из требования простоты, выберем сепарабельной. Также ограничимся случаем центрально-симметричных сил и будем считать, что локальная часть $W(r)$ и компоненты $V_{ln}(r)$ нелокальной сепарабельной составляющей полного взаимодействия не зависят от энергии.

Одним из подходов к релятивистской обратной задаче может служить релятивистский квазипотенциальный (РКП) подход Логунова – Тавхелидзе [16], построенный на основе ковариантной одновременной формулировки проблемы двух тел в квантовой теории поля. Еще один вариант РКП-подхода к задаче о двух релятивистских частицах был предложен в работах [17, 18]. Данный подход не связан с формализмом Бете–Солпитера и ковариантным формализмом Фейнмана – Дайсона, а использует гамильтонову формулировку квантовой теории поля [19]. При этом важно, что трехмерность в нее заложена с самого начала, а все частицы даже в промежуточных состояниях являются физическими, т.е. лежат на массовых поверхностях. РКП-подход сводит изучение релятивистской двухчастичной системы к исследованию ковариантных трехмерных двухчастичных уравнений для волновой функции шредингеровского вида или уравнений Липпмана–Швингера для инвариантной амплитуды рассеяния вне энергетической поверхности с обобщенным потенциалом – квазипотенциалом. Предложенный в этих работах формализм, будучи трехмерным и допуская вероятностную интерпретацию волновой функции, в то же время обладает и главными преимуществами (перенормируемость, аналитичность и т. д.) полностью ковариантного метода. Кроме того, данный подход позволяет переходить от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению, введенному в [20], причем все рассматриваемые величины имеют ясный физический смысл и аналогию с нерелятивистской квантовой механикой. Эти достоинства РКП-подхода сделали его одним из эффективных методов релятивистского описания связанной системы двух частиц, и в настоящее время он продолжает оставаться одним из методов исследования составных объектов [21–24].

В данной работе в рамках РКП-подхода [25] в квантовой теории поля рассматривается задача восстановления компонент $V_{ln}(r)$ $(n=1,2,...,M_l)$ нелокальной сепарабельной составляющей полного взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс $(m_1 \neq m_2)$ по соответствующим им приращениям $\delta_l^{V_{ln}}(\chi')$ фазового сдвига и энергиям связанных состояний. При этом будем считать, что локальная часть $W(r)$ полного взаимодействия является известной и допускает существование $\sigma_l^{(0)}$ связанных состояний с энергиями

$$0 \le E_{tj}^{(0)} = \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(0)} < 1, \quad \chi_{tj}^{(0)} = i\kappa_{tj}^{(0)}, \quad 0 < \kappa_{tj}^{(0)} \le \pi/2, \quad j=1,2,...,\sigma_l^{(0)}. \tag{1}$$

В основу рассматриваемого подхода положены выражения (см. работу [26]) для приращений $\delta_l^{V_{ln}}(\chi')$ фазового сдвига, соответствующие компонентам $V_{ln}(r)$ нелокальной сепарабельной составляющей полного взаимодействия в каждой парциальной волне, которые даются следующими соотношениями ($\hbar = c = 1$):

$$\operatorname{tg}\delta_l^{V_{ln}}(\chi') = -\frac{\pi}{2}\operatorname{sh}^{-1}\chi' A_{ln}(\chi')\left[1 - \frac{\varepsilon_{ln}}{2}\sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}} C_{lj}^{(n-1)} \frac{\left|\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\right|^2}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)}} + \frac{1}{2}P\int_0^\infty d\chi \frac{A_{ln}(\chi)}{\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi'}\right]^{-1}; \tag{2}$$

$$A_{ln}(\chi)=\varepsilon_{ln}\tau_l^{(n-1)}(\chi)\left|\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)\right|^2,\ \tau_l^{(n-1)}(\chi)=\frac{2}{\pi}\left[Q_l(\operatorname{cth}\chi)\prod_{m=1}^{n-1}\cos\delta_l^{V_{lm}}(\chi)\left|F_l^W(\chi)\right|^{-1}\right]^2, \tag{3}$$

$$\varepsilon_{ln}=\pm1,\ \ n=1,2,...,M_l.$$

Здесь P есть символ главного значения; $Q_l(z)$ – функция Лежандра второго рода; $\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)$ – образ компоненты $V_{ln}(r)$ нелокальной составляющей полного взаимодействия; $F_l^W(\chi)$ – функция Йоста, причем ее нули $\chi_{tj}^{(0)}(j=1,2,...,\sigma_l^{(0)})$ определяют значения энергий (1) связанных состояний, обусловленных локальным квазипотенциалом $W(r)$ [1].

Для восстановления компонент $V_{ln}(r)$ по приращениям $\delta_l^{V_{ln}}(\chi')$ фазового сдвига и энергиям связанных состояний необходимо решить интегральные уравнения (2) относительно функций $A_{ln}(\chi)$. Для этого воспользуемся подходом, изложенным в работе автора [27]. После этого, используя интегральное преобразование Гильберта, из (3) найдем функции $\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)$. Наконец, выполнив обобщенные релятивистские интегральные преобразования Ханкеля

$$V_{ln}(r)=\int_0^\infty d\rho_l^{(n-1)}(\operatorname{ch}\chi)\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)\psi_l^{(n-1)}(r,\chi)\ ,\quad n=1,2,...,M_l\ , \tag{4}$$

восстановим компоненты $V_{ln}(r)$. Здесь $\psi_l^{(n-1)}(r,\chi)$ есть решение конечно-разностного квазипотенциального уравнения с квазипотенциалом, отвечающим суперпозиции локального $W(r)$ и $(n-1)$ - компонентного нелокального сепарабельного $\sum_{m=1}^{n-1}\varepsilon_{lm}V_{lm}(r)V_{lm}(r')$ квазипотенциалов. Этому решению отвечает спектральная плотность

$$\frac{d\rho_l^{(n-1)}(E)}{dE}=\begin{cases}\operatorname{sh}^{-1}\chi\ \tau_l^{(n-1)}(\chi),\quad E=\operatorname{ch}\chi\ge1\ ,\\ \sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}}C_{lj}^{(n-1)}\delta(E-E_{tj}^{(n-1)}),\quad 0\le E=\operatorname{ch}\chi<1\ ,\quad 0\le E_{tj}^{(n-1)}=\operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)}<1\ ,\\ \chi=i\kappa,\quad \chi_{tj}^{(n-1)}=i\kappa_{tj}^{(n-1)},\quad 0<\kappa,\kappa_{tj}^{(n-1)}\le\pi/2,\quad n=1,2,...,M_l\ .\end{cases} \tag{5}$$

При этом для решений $\psi_l^{(n-1)}(r,\chi)$ справедливы условия полноты[2]

$$\int_0^\infty d\rho_l^{(n-1)}(E)\psi_l^{(n-1)}(r,\chi)\psi_l^{(n-1)^*}(r',\chi)=\delta(r'-r)\ ,\quad n=1,2,...,M_l. \tag{6}$$

Будем предполагать, что приращения $\delta_l^{V_{ln}}(\chi')$ фазового сдвига в выражении (2) являются непрерывными по Гельдеру функциями с некоторым положительным индексом и при $\chi'\to+\infty$ для них имеют место оценки

---

[1] Напомним [26], что функция Йоста $F_l^{(n)}(\chi)$, отвечающая n-му шагу итерации, выражается через соответствующий ей фазовый сдвиг $\delta_l^{(n)}(\chi)=\delta_l^W(\chi)+\sum_{m=1}^{n}\delta_l^{V_{lm}}(\chi)$ соотношением $F_l^{(n)}(\chi)=\left|F_l^{(n)}(\chi)\right|\exp\left[-i\delta_l^{(n)}(\chi)\right]$, $\left|F_l^{(n)}(\chi)\right|=\left|F_l^W(\chi)\right|\prod_{m=1}^{n}\cos^{-1}\delta_l^{V_{lm}}(\chi)$. Нули $\chi_{tj}^{(n)}$ функции Йоста определяют $\sigma_l^{(n)}$ истинных связанных состояний с энергиями $E_{tj}^{(n)}=\operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n)}$ $(\chi_{tj}^{(n)}=i\kappa_{tj}^{(n)},\ 0<\kappa_{tj}^{(n)}\le\pi/2,\ j=1,2,...,\sigma_l^{(n)},\ n=1,2,...,M_l)$, обусловленных суперпозицией $W(r)$ и $\sum_{m=1}^{n}\varepsilon_{lm}V_{lm}(r)V_{lm}(r')$. При этом нормировочные константы $C_{lj}^{(n)}$ для собственных функций $\psi_l^{(n)}(r,\chi_{tj}^{(n)})$ этих связанных состояний также выражаются через функции Йоста:

$$\left[C_{lj}^{(n)}\right]^{-1}=\int_0^\infty dr\left|\psi_l^{(n)}(r,\chi_{tj}^{(n)})\right|^2=\frac{i}{4}\left[Q_l(\operatorname{cth}\chi_{tj}^{(n)})\right]^{-2}F_l^{(n)}(-\chi_{tj}^{(n)})dF_l^{(n)}\left(\chi_{tj}^{(n)}\right)/d\chi_{tj}^{(n)},\ j=1,2,...,\sigma_l^{(n)}\ ,\ n=1,2,...,M_l\ .$$

[2] Заметим, что интегральные преобразования (4), как и условия полноты (6), при $n=1$ совпадают с соответствующими соотношениями, полученными в работе автора [28].

$$\delta_l^{V_{ln}}(\chi') = O(\chi'^{-\gamma}) \ , \quad l \ge 0 \ , \quad \gamma > 1 \ , \quad n = 1,2,...,M_l. \tag{7}$$

Эти требования являются необходимыми и достаточными для того, чтобы компоненты $V_{ln}(r)$ сепарабельного взаимодействия удовлетворяли условиям

$$rV_{ln}(r) \in L_1(0,\infty) \ , \quad n = 1,2,...,M_l \ , \tag{8}$$

что обеспечивает единственность решения обратной задачи. При этом для приращений фазового сдвига выполняется теорема Левинсона

$$\delta_l^{V_{ln}}(0) - \delta_l^{V_{ln}}(\infty) = \delta_l^{V_{ln}}(0) = \pi(\sigma_l^{(n)} - \sigma_l^{(n-1)} + \nu_l^{(n)}) \ , \quad n = 1,2,...,M_l \ , \tag{9}$$

причем

$$\delta_l^{W}(0) - \delta_l^{W}(\infty) = \delta_l^{W}(0) = \pi\sigma_l^{(0)}.$$

Здесь $\nu_l^{(n)}$ – число «поддельных» связанных состояний, обусловленных n-й компонентой нелокального сепарабельного квазипотенциала в каждой парциальной волне, с энергиями

$$E_{fk}^{(n)} = \mathrm{ch}\chi_{fk}^{(n)} \ge 1 \ , \quad k = \begin{cases} 0,1,...,\nu_l^{(n)} - 1 \ , & \varepsilon_{ln} = 1, \\ 1,2,...,\nu_l^{(n)}, & \varepsilon_{ln} = -1, \quad n = 1,2,...,M_l \ , \end{cases} \tag{10}$$

а $\sigma_l^{(n)}$ – число истинных связанных состояний, обусловленных суперпозицией локального $W(r)$ и n-компонентного нелокального сепарабельного $\sum_{m=1}^{n} \varepsilon_{lm} V_{lm}(r) V_{lm}(r')$ квазипотенциалов, с энергиями

$$0 \le E_{tj'}^{(n)} = \mathrm{ch}\chi_{tj'}^{(n)} < 1 \ , \quad \chi_{tj'}^{(n)} = i\kappa_{tj'}^{(n)}, \quad 0 < \kappa_{tj'}^{(n)} \le \pi/2 \ , \quad j' = 1,2,...,\sigma_l^{(n)}, \tag{11}$$

$$\sigma_l^{(n)} = \begin{cases} \sigma_l^{(n-1)} - 1 \ \ (\Phi_{ln}(1) < 0) \ , \quad \sigma_l^{(n-1)} \ \ (\Phi_{ln}(1) > 0) \ \text{ при } \varepsilon_{ln} = 1, \\ \sigma_l^{(n-1)} \ \ (\Phi_{ln}(1) < 0) \ , \quad \sigma_l^{(n-1)} + 1 \ \ (\Phi_{ln}(1) > 0) \ \text{ при } \varepsilon_{ln} = -1 \ , \quad n = 1,2,...,M_l, \end{cases}$$

где

$$\Phi_{ln}(E) = \varepsilon_{ln} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}} \frac{C_{lj}^{(n-1)} \, |\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})|^2}{E - E_{tj}^{(n-1)}} + \frac{1}{2} P\int_0^\infty d\chi \frac{|A_{ln}(\chi)|}{\mathrm{ch}\chi - E}.$$

При этом значения энергий (10) «поддельных» связанных состояний определяются по тем значениям χ', при которых приращения фазового сдвига пересекают прямые $\delta_l^{V_{ln}} = \pi k$ (k – целое) сверху при возрастании χ', т.е.

$$\delta_l^{V_{ln}}(\chi_{fk}^{(n)}) = \pi k, \quad k = \begin{cases} 0,1,...,\nu_l^{(n)} - 1, & \varepsilon_{ln} = 1, \\ 1,2,...,\nu_l^{(n)}, & \varepsilon_{ln} = -1 \ , \quad n = 1,2,...,M_l. \end{cases} \tag{12}$$

В то же время значения энергий (11) истинных связанных состояний полного взаимодействия являются простыми корнями уравнений

$$\Phi_{ln}(E_{tj'}^{(n)}) = \varepsilon_{ln} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}} C_{lj}^{(n-1)} \frac{\left|\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\right|^2}{E_{tj'}^{(n)} - E_{tj}^{(n-1)}} + \frac{1}{2}\int_0^\infty d\chi \frac{|A_{ln}(\chi)|}{\mathrm{ch}\,\chi - E_{tj'}^{(n)}} = 0, \tag{13}$$

$$j' = 1,2,...,\sigma_l^{(n)}, \quad n = 1,2,...,M_l.$$

1. Решение интегральных уравнений

Для того чтобы решить интегральные уравнения (2), выполним замену переменных $x = \mathrm{ch}\chi'$, $t = \mathrm{ch}\chi$ и введем следующие обозначения:

$$\Delta(x) = \delta_l^{V_{ln}}(\mathrm{arch}\ x), \quad g_{ln}(x) = -\frac{2}{\pi}(x^2 - 1)^{1/2}\,\mathrm{tg}\Delta_l^{V_{ln}}(x), \tag{14}$$

$$h_{ln}(x) = -\sin\Delta_l^{V_{ln}}(x)\exp\left[-i\Delta_l^{V_{ln}}(x)\right],\ \psi_{ln}(x) = A_{ln}(\operatorname{arch} x)g_{ln}^{-1}(x)\left[1+\frac{i\pi}{2}g_{ln}(x)(x^2-1)^{-1/2}\right].$$

Тогда уравнения (2) преобразуются к виду

$$\psi_{ln}(x) = 1-\frac{\varepsilon_{ln}}{2}\sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}} C_{lj}^{(n-1)}\frac{\left|\tilde V_{ln}^{(n-1)}\left(\chi_{tj}^{(n-1)}\right)\right|^2}{x-E_{tj}^{(n-1)}}+\frac{1}{\pi}\int_1^\infty dt\frac{\psi_{ln}(t)h_{ln}^*(t)}{t-x-i0},\quad n=1,2,...,M_l. \tag{15}$$

Решения уравнений (15), как и в случае однокомпонентного сепарабельного квазипотенциала [27], имеют вид

$$\psi_{ln}(x) = H_{ln}(x_+) \equiv \lim_{\eta\to+0} H_{ln}(x+i\eta),\ 1\le x\le\infty,\ n=1,2,...,M_l. \tag{16}$$

Здесь функции

$$H_{ln}(z) = \mu_{ln}(z)+\frac{1}{\pi}\int_1^\infty dt\frac{\psi_{ln}(t)h_{ln}^*(t)}{t-z}, \tag{17}$$

где

$$\mu_{ln}(z) = 1-\frac{\varepsilon_{ln}}{2}\sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}} C_{lj}^{(n-1)}\frac{\left|\tilde V_{ln}^{(n-1)}\left(\chi_{tj}^{(n-1)}\right)\right|^2}{z-E_{tj}^{(n-1)}},\quad n=1,2,...,M_l,$$

являются аналитическими в комплексной плоскости переменной z с разрезом от 1 до $+\infty$, за исключением простых полюсов в точках $z=E_{tj}^{(n-1)}$ ($0\le E_{tj}^{(n-1)}<1,\ j=1,2,...,\sigma_l^{(n-1)},\quad n=1,2,...,M_l$), причем

$$\lim_{|z|\to\infty} H_{ln}(z) = 1,\quad n=1,2,...,M_l, \tag{18}$$

во всех направлениях, если только функции $\psi_{ln}(x)$ непрерывны по Гельдеру, а интеграл в (17) сходится. Далее, представим функции $H_{ln}(z)$ в виде

$$H_{ln}(z) = \mu_{ln}(z)+G_{ln}(z)\exp\left[\omega_{ln}(z)\right], \tag{19}$$

где

$$\omega_{ln}(z) = -\frac{1}{\pi}\int_1^\infty dt\frac{\Delta_l^{V_{ln}}(t)}{t-z},\ n=1,2,...,M_l, \tag{20}$$

и подставим решения (16) в выражение для их скачка на разрезе

$$\begin{aligned} H_{ln}(x_+)-H_{ln}(x_-) &= G_{ln}(x_+)\exp\left[\omega_{ln}(x_+)\right]-G_{ln}(x_-)\exp\left[\omega_{ln}(x_-)\right]= \\ &= -2i\sin\Delta_l^{V_{ln}}(x)\exp\left[i\Delta_l^{V_{ln}}(x)\right]\psi_{ln}(x),\quad n=1,2,...,M_l. \end{aligned} \tag{21}$$

В результате приходим к неоднородным уравнениям Римана – Гильберта для функций $G_{ln}(z)$ в форме

$$G_{ln}(x_+)-G_{ln}(x_-) = -\mu_{ln}(x)\left\{\exp\left[-\omega_{ln}(x_+)\right]-\exp\left[-\omega_{ln}(x_-)\right]\right\},\ 1\le x\le\infty,\ n=1,2,...,M_l, \tag{22}$$

причем

$$\omega_{ln}(x_\pm) = \lim_{\eta\to+0}\omega_{ln}(x\pm i\eta) = \alpha_{ln}(x)\mp i\Delta_l^{V_{ln}}(x),\ \alpha_{ln}(x) = -\frac{1}{\pi}P\int_1^\infty dt\frac{\Delta_l^{V_{ln}}(t)}{t-x}. \tag{23}$$

Теперь заметим, что из представлений (19), (20), предположений о поведении приращений фазового сдвига и условий (7), (18) следует, что во всех направлениях

$$\lim_{|z|\to\infty} G_{ln}(z) = 0,\ \lim_{|z|\to\infty}\omega_{ln}(z) = 0,\ n=1,2,...,M_l. \tag{24}$$

Более того, функции $G_{ln}(z)$ являются аналитическими в комплексной плоскости переменной z с разрезом от 1 до $+\infty$, а функции (20) определены на разрезе всюду, кроме, быть может, точки $z=1$, где их поведение имеет вид

$$\omega_{ln}(z) = (1/\pi)\Delta_l^{V_{ln}}(1)\ln|1-z| + \Omega_{ln}(z)\ , \quad z \to 1, \quad n = 1,2,...,M_l. \tag{25}$$

Здесь функции $\Omega_{ln}(z)$ конечны при $z \to 1$, а $\Delta_l^{V_{ln}}(1) = \delta_l^{V_{ln}}(0) = \pi(\sigma_l^{(n)} - \sigma_l^{(n-1)} + \nu_l^{(n)}) \ge 0$ в силу теоремы Левинсона (9). Следовательно, функции $\exp\left[\omega_{ln}(z)\right]$ либо конечны при $\sigma_l^{(n)} - \sigma_l^{(n-1)} + \nu_l^{(n)} = 0$, либо имеют нуль порядка $\sigma_l^{(n)} - \sigma_l^{(n-1)} + \nu_l^{(n)} > 0$ в точке $z = 1$[3]. Тем самым частные решения неоднородных уравнений (22), удовлетворяющих условиям (24), существуют и даются выражениями

$$\tilde{G}_{ln}(z) = 1 - \mu_{ln}(z)\exp[-\omega_{ln}(z)] - \frac{\varepsilon_{ln}}{2}\sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}} C_{lj}^{(n-1)} \frac{\left|\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\right|^2 \exp[-\omega_{ln}(E_{tj}^{(n-1)})]}{z - E_{tj}^{(n-1)}}, \quad n = 1,2,...,M_l.$$

Тогда частные решения $\tilde{\psi}_{ln}(x)$ неоднородных интегральных уравнений (15) в силу выражений (16) и (19) принимают вид

$$\tilde{\psi}_{ln}(x) = \exp[\omega_{ln}(x_+)]\left\{1 - \frac{\varepsilon_{ln}}{2}\sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}} C_{lj}^{(n-1)} \frac{\left|\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}\left(\chi_{tj}^{(n-1)}\right)\right|^2 \exp\left[-\omega_{ln}\left(E_{tj}^{(n-1)}\right)\right]}{x - E_{tj}^{(n-1)}}\right\}, n = 1,2,...,M_l\ . \tag{26}$$

Отметим, что функции (26) регулярны при $x = 1$ (они либо конечны при $\sigma_l^{(n)} - \sigma_l^{(n-1)} + \nu_l^{(n)} = 0$, либо имеют нуль порядка $\sigma_l^{(n)} - \sigma_l^{(n-1)} + \nu_l^{(n)} > 0$ в этой точке), непрерывны по Гельдеру с тем же индексом, что и приращения фазового сдвига, и ограничены при $x \to +\infty$, а это совпадает с априорными предположениями об их свойствах. Более того, легко показать, что функции (26) удовлетворяют уравнениям (15), поскольку по теореме о вычетах имеем

$$\lim_{\substack{R\to+\infty \\ \eta\to+0}} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} dz \frac{\tilde{H}_{ln}(z)}{z - x - i\eta} = \mathrm{res}\left[\frac{\tilde{H}_{ln}(z)}{z - x - i\eta}, \quad z = x + i\eta\right]\Bigg|_{\eta\to+0} +$$

$$+\sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}} \delta_{jj'}\,\mathrm{res}\left[\frac{\tilde{H}_{ln}(z)}{z - x - i\eta}, \quad z = E_{tj'}^{(n-1)}\right]\Bigg|_{\eta\to+0},$$

где

$$\tilde{H}_{ln}(z) = \exp[\omega_{ln}(z)]\left\{1 - \frac{\varepsilon_{ln}}{2}\sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}} C_{lj}^{(n-1)} \frac{\left|\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}\left(\chi_{tj}^{(n-1)}\right)\right|^2 \exp\left[-\omega_{ln}\left(E_{tj}^{(n-1)}\right)\right]}{z - E_{tj}^{(n-1)}}\right\},$$

а Γ^+ есть замкнутый контур, состоящий из окружностей C_η^- радиуса η с центром в точке $z = 1$, C_R^+ радиуса R с центром в точке $z = 0$ и двух берегов разреза от 1 до R, проходимых в противоположных направлениях. При этом вклад интеграла по окружности C_η^-, в силу оценки (25), стремится к нулю при $\eta \to +0$, а его вклад по окружности C_R^+, согласно асимптотике (18), стремится к 1 при $R \to +\infty$. Отсюда, принимая во внимание выражение (23), заключаем, что функции (26) являются частными решениями неоднородных интегральных уравнений (15).

Теперь рассмотрим функции

$$H_{lno}(z) = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty dt \frac{\psi_{lno}(t) h_{ln}^*(t)}{t - z}, \quad n = 1,2,...,M_l. \tag{27}$$

Очевидно, эти функции являются аналитическими в комплексной плоскости переменной z с разрезом от 1 до $+\infty$, причем во всех направлениях

[3] В тех случаях, когда $\delta_l^{V_{ln}}(0) = -\pi$, т.е. при $\sigma_l^{(n)} = \sigma_l^{(n-1)} - 1$, $\sigma_l^{(n-1)} \ne 0$ и $\nu_l^{(n)} = 0$ $(\varepsilon_{ln} = +1, \quad n = 1,2,...,M_l)$, функции $H_{ln}(z)$, а значит, и функции $\psi_{ln}(x)$ не являются более конечными при $z = 1$. В этих случаях решение обратной задачи требует отдельного рассмотрения.

$$\lim_{|z|\to\infty} H_{lno}(z)=0,\quad n=1,2,...,M_l.$$

Поэтому общие решения однородных интегральных уравнений

$$\psi_{lno}(x)=\frac{1}{\pi}\int_1^\infty dt\frac{\psi_{lno}(t)h_{ln}^*(t)}{t-x-i0},\quad n=1,2,...,M_l, \tag{28}$$

имеют вид

$$\psi_{lno}\left(x\right)=H_{lno}\left(x_+\right)\equiv\lim_{\eta\to+0}H_{lno}(x+i\eta)\ ,\quad 1\le x\le\infty\ ,\quad n=1,2,...,M_l. \tag{29}$$

При этом функции (27) удовлетворяют однородным уравнениям Римана–Гильберта

$$H_{lno}(x_+)\exp[2i\Delta_l^{V_{ln}}(x)]-H_{lno}(x_-)=0\ ,\quad 1\le x\le\infty,\ n=1,2,...,M_l, \tag{30}$$

если исходить из выражения (21) для скачка функций $H_{ln}(z)\equiv H_{lno}(z)$ на разрезе и представления (29). Следовательно, общие решения уравнений (28) ищем в виде

$$H_{lno}(z)=\exp\left[\omega_{ln}\left(z\right)\right]\sum_{k=1}^{N_l^{(n)}}\frac{A_k^{(n)}}{\left(z-1\right)^k},\quad n=1,2,...,M_l.$$

Подставка этого выражения для $H_{lno}(z)$ в уравнения (30) и требование конечности при $z=1$ (функции $H_{lno}(z)$ либо конечны при $\sigma_l^{(n)}-\sigma_l^{(n-1)}+\nu_l^{(n)}=0$, либо имеют в этой точке нуль порядка $\sigma_l^{(n)}-\sigma_l^{(n-1)}+\nu_l^{(n)}>0$) дает

$$N_l^{(n)}=\begin{cases}\sigma_l^{(n)}-\sigma_l^{(n-1)}+\nu_l^{(n)}>0,\\ 0,\ \ \sigma_l^{(n)}-\sigma_l^{(n-1)}+\nu_l^{(n)}=0,\ \ n=1,2,...,M_l.\end{cases}$$

Тогда

$$\psi_{lno}(x)=\exp[\omega_{ln}(x_+)]\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{N_l^{(n)}}\frac{A_k^{(n)}}{(x-1)^k}\ ,\ \ N_l^{(n)}=\sigma_l^{(n)}-\sigma_l^{(n-1)}+\nu_l^{(n)}>0,\\ 0,\ \ N_l^{(n)}=\sigma_l^{(n)}-\sigma_l^{(n-1)}+\nu_l^{(n)}=0,\ \ n=1,2,...,M_l.\end{cases} \tag{31}$$

Далее, как и в случае частных решений, интегрированием по контуру Γ^+ убеждаемся, что функции (31) являются решениями уравнений (28) и обладают всеми требуемыми свойствами.

Итак, согласно соотношениям (26) и (31), общие решения интегральных уравнений (15) даются выражениями

$$\begin{aligned}\psi_{ln}(x)=\tilde{\psi}_{ln}(x)+\psi_{lno}(x)=\exp[\omega_{ln}(x_+)]\Bigg\{1+\sum_{k=1}^{N_l^{(n)}}\frac{A_k^{(n)}}{(x-1)^k}-\\ -\frac{\varepsilon_{ln}}{2}\sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}}C_{lj}^{(n-1)}\frac{|\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})|^2\exp[-\omega_{ln}(E_{tj}^{(n-1)})]}{x-E_{tj}^{(n-1)}}\Bigg\}\ ,\ \ n=1,2,..,M_l\ .\end{aligned} \tag{32}$$

Возвращаясь к прежним обозначениям (14) и преобразуя сумму в произведение, решения (32) представим в двух формах:

$$A_{ln}(\chi')=-\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\chi'\sin\delta_l^{V_{ln}}(\chi')\exp[\alpha_{ln}(\operatorname{ch}\chi')]\left\{1+\sum_{k=1}^{N_l^{(n)}}\frac{A_k^{(n)}}{(\operatorname{ch}\chi'-1)^k}-\sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}}\frac{B_j^{(n)}}{\operatorname{ch}\chi'-E_{tj}^{(n-1)}}\right\}; \tag{33}$$

$$A_{ln}(\chi')=-\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\chi'\sin\delta_l^{V_{ln}}(\chi')\exp[\alpha_{ln}(\operatorname{ch}\chi')]\prod_{k=1-\delta}^{N_l^{(n)}-\delta}\left(1+\frac{a_k^{(n)}}{\operatorname{ch}\chi'-1}\right)\prod_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}}\left(1-\frac{b_j^{(n)}}{\operatorname{ch}\chi'-E_{tj}^{(n-1)}}\right), \tag{34}$$

где

$$\alpha_{ln}\left(\operatorname{ch}\chi'\right)=-\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_0^\infty d\chi\frac{\operatorname{sh}\chi\,\delta_l^{V_{ln}}\left(\chi\right)}{\operatorname{ch}\chi-\operatorname{ch}\chi'}; \tag{35}$$

$$B_j^{(n)}=\frac{\varepsilon_{ln}}{2}C_{lj}^{(n-1)}\,|\,\tilde V_{ln}^{(n-1)}(\chi_{tj}^{(n-1)})\,|^2\,\exp[-\omega_{ln}(E_{tj}^{(n-1)})],\tag{36}$$

$$N_l^{(n)}=\sigma_l^{(n)}-\sigma_l^{(n-1)}+\nu_l^{(n)}=\begin{cases}\nu_l^{(n)}-1,\ \nu_l^{(n)} & \text{при } \varepsilon_{\rm ln}=1,\\ \nu_l^{(n)},\ \nu_l^{(n)}+1 & \text{при } \varepsilon_{ln}=-1,\end{cases}\qquad \delta=\begin{cases}1, & \varepsilon_{ln}=1,\\ 0, & \varepsilon_{ln}=-1\ ,\end{cases}\quad n=1,2,...,M_l.$$

2. Нахождение параметров и восстановление компонент

Заметим, что решения (33), так же как и решения (34), зависят от $N_l^{(n)}+\sigma_l^{(n-1)}=\sigma_l^{(n)}+\nu_l^{(n)}$ параметров, а именно $\{A_k\}$, $\{B_j\}$ и $\{a_k^{(n)}\}$, $\{b_j^{(n)}\}$ соответственно, причем зависимости между ними определяются из соотношений

$$1+\sum_{k=1}^{N_l^{(n)}}\frac{A_k^{(n)}}{(\operatorname{ch}\chi'-1)^k}-\sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}}\frac{B_j^{(n)}}{\operatorname{ch}\chi'-E_{tj}^{(n-1)}}=\prod_{k=1-\delta}^{N_l^{(n)}-\delta}\left(1+\frac{a_k^{(n)}}{\operatorname{ch}\chi'-1}\right)\prod_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}}\left(1-\frac{b_j^{(n)}}{\operatorname{ch}\chi'-E_{tj}^{(n-1)}}\right),\ n=1,2,...,M_l.$$

Отсюда, в частности, легко находим

$$B_j^{(n)}=b_j^{(n)}\prod_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{\sigma_l^{(n-1)}}\left(1-\frac{b_m^{(n)}}{E_{tj}^{(n-1)}-E_{tm}^{(n-1)}}\right)\prod_{k=1-\delta}^{N_l^{(n)}-\delta}\left(1-\frac{a_k^{(n)}}{1-E_{tj}^{(n-1)}}\right),\ j=1,2,...,\sigma_l^{(n-1)}\ ,\quad n=1,2,...,M_l\ .\tag{37}$$

Для определения параметров $\{a_k^{(n)}\}$ и $\{b_j^{(n)}\}$ воспользуемся тем, что функции $A_{ln}(\chi')$, согласно (3), сохраняют свой знак при всех значениях χ', в то время как приращения фазового сдвига при значениях энергий (10) «поддельных» связанных состояний удовлетворяют условиям (12). Значит, правая часть решений (34) сохранит свой знак при переходе через точки $\chi'=\chi_{fk}^{(n)}$, если

$$a_k^{(n)}=1-\operatorname{ch}\chi_{fk}^{(n)},\quad k=\begin{cases}0,1,...,N_l^{(n)}-1, & \varepsilon_{ln}=1,\\ 1,2,...,N_l^{(n)},\ \sigma_l^{(n)}=\sigma_l^{(n-1)}, & \varepsilon_{ln}=-1,\\ 1,2,...,N_l^{(n)}-1,\ \sigma_l^{(n)}=\sigma_l^{(n-1)}+1, & \varepsilon_{ln}=-1,\end{cases}\tag{38}$$

$$b_{\sigma_l^{(n-1)}}^{(n)}=\operatorname{ch}\chi_{f(\nu_l^{(n)}-1)}^{(n)}-\operatorname{ch}\chi_{t\sigma_l^{(n-1)}}^{(n-1)},\ \ \sigma_l^{(n)}=\sigma_l^{(n-1)}-1,\ \ \varepsilon_{ln}=1\ ,\ n=1,2,...,M_l.$$

Оставшиеся значения параметров $a_{\nu_l^{(n)}+1}^{(n)}$ и $\left\{b_j^{(n)}\right\}$ находятся путем подстановки решений (34) в уравнения (13) для энергий (11) и последующего использования теоремы о вычетах. Это приводит, учитывая соотношения (36), к уравнениям

$$\exp[\omega_{ln}(E_{tj'}^{(n)})]\prod_{k=1-\delta}^{N_l^{(n)}-\delta}\left(1-\frac{a_k^{(n)}}{1-E_{tj'}^{(n)}}\right)\prod_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}}\left(1-\frac{b_j^{(n)}}{E_{tj'}^{(n)}-E_{tj}^{(n-1)}}\right)=0,$$
$$j'=1,2,...,\sigma_l^{(n)},\quad n=1,2,...,M_l\ .\tag{39}$$

Отсюда находим оставшиеся значения параметров:

$$a_{\nu_l^{(n)}+1}^{(n)}=1-\operatorname{ch}\chi_{t(\sigma_l^{(n-1)}+1)}^{(n)},\quad \sigma_l^{(n)}=\sigma_l^{(n-1)}+1\ \ (\Phi_{ln}(1)>0),\quad \varepsilon_{ln}=-1,$$

$$b_j^{(n)}=\operatorname{ch}\chi_{tj'}^{(n)}-\operatorname{ch}\chi_{tj}^{(n-1)},\tag{40}$$

$$j'=j=\begin{cases}1,2,...,\sigma_l^{(n)},\ \ \sigma_l^{(n)}=\begin{cases}\sigma_l^{(n-1)}-1\ (\Phi_{ln}(1)<0)\ ,\\ \sigma_l^{(n-1)}\ \ (\Phi_{ln}(1)>0),\end{cases} & \varepsilon_{ln}=1;\\[2ex] 1,2,...,\sigma_l^{(n-1)},\ \ \sigma_l^{(n)}=\begin{cases}\sigma_l^{(n-1)}\ \ (\Phi_{ln}(1)<0),\\ \sigma_l^{(n-1)}+1\ \ (\Phi_{ln}(1)>0),\end{cases} & \varepsilon_{ln}=-1,\end{cases}\quad n=1,2,...,M_l.$$

В то же время уравнения (39) допускают и решения вида

$$b_j^{(n)} = E_{tj}^{(n)} - E_{tj}^{(n-1)} = 0\,.$$

Это означает, что в этих случаях имеются вырожденные состояния при энергиях $E_{tj}^{(n-1)}$, причем $E_{tj}^{(n)} = E_{t(j+1)}^{(n)} = E_{tj}^{(n-1)}$, т.е. степень вырождения для каждого $E_{tj}^{(n-1)}$ не может быть больше двух. Кроме того, из (39) также следует, что хотя бы один из параметров $\{b_j^{(n)}\}$ отличен от нуля.

Таким образом, коэффициенты $\{a_k^{(n)}\}$ и $\{b_j^{(n)}\}$ определяются однозначно выражениями (38) и (40). Тем самым функции $A_{ln}(\chi')$ полностью определяются приращениями фазового сдвига и энергиями связанных состояний, а их выражения (34) принимают вид

$$\begin{gathered} A_{ln}(\chi') = -\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\chi'\sin\delta_l^{V_{ln}}(\chi')\exp[\alpha_{ln}(\operatorname{ch}\chi')][\operatorname{sh}(\chi'/2)]^{-2N_l^{(n)}} \times \\ \times\prod_{j'=1}^{\sigma_l^{(n)}}\left[\operatorname{sh}^2(\chi'/2)+\sin^2(\kappa_{tj'}^{(n)}/2)\right]\prod_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}}\left[\operatorname{sh}^2(\chi'/2)+\sin^2(\kappa_{tj}^{(n-1)}/2)\right]^{-1}\times \\ \times\prod_{k=1-\delta}^{\nu_l^{(n)}-\delta}\left[\operatorname{sh}^2(\chi'/2)-\operatorname{sh}^2(\chi_{fk}^{(n)}/2)\right],\quad n=1,2,\ldots,M_l\,. \end{gathered} \tag{41}$$

При этом, как видно из выражений (35) и (41), функции $A_{ln}(\chi')$ непрерывны по Гельдеру, а при $|\chi'|\to\infty$ они ведут себя как

$$\operatorname{ch}\chi'|\chi'|^{-\gamma},\ \ \gamma>1,\ \ n=1,2,\ldots,M_l,$$

если только приращения фазового сдвига удовлетворяют условиям (7). Но это означает, что компоненты $V_{ln}(r)$ удовлетворяют условиям (8).

Чтобы восстановить компоненты $V_{ln}(r)$ посредством преобразований (4), введем функции

$$\begin{gathered} \hat V_{ln}\left(\operatorname{sh}(\chi'/2)\right) = \prod_{j'=1}^{\sigma_l^{(n)}}\left[\frac{\operatorname{sh}(\chi'/2)+i\sin\left(\kappa_{tj'}^{(n)}/2\right)}{\operatorname{sh}(\chi'/2)-i\sin\left(\kappa_{tj'}^{(n)}/2\right)}\right]\prod_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}}\left[\frac{\operatorname{sh}(\chi'/2)-i\sin\left(\kappa_{tj}^{(n-1)}/2\right)}{\operatorname{sh}(\chi'/2)+i\sin\left(\kappa_{tj}^{(n-1)}/2\right)}\right]\times \\ \times\left[Q_l\ (\operatorname{cth}\chi')\prod_{m=1}^{n-1}\cos\delta_l^{V_{lm}}(\chi')\tilde V_{ln}^{(-)}\left(\operatorname{sh}(\chi'/2)\right)\left|F_l^W(\chi')\right|^{-1}\right]^2,\quad n=1,2,\ldots,M_l\,, \end{gathered} \tag{42}$$

где

$$\left|\tilde V_{ln}^{(-)}\left(\operatorname{sh}(\chi'/2)\right)\right| = \left|\tilde V_{ln}^{(n-1)}(\chi')\right|,\quad \operatorname{Re}\tilde V_{ln}^{(-)}\left(\operatorname{sh}(\chi'/2)\right) = \operatorname{Re}\tilde V_{ln}^{(n-1)}(\chi'), \tag{43}$$

$$\arg\tilde V_{ln}^{(-)}\left(-\operatorname{sh}(\chi'/2)\right) = -\arg\tilde V_{ln}^{(-)}\left(\operatorname{sh}(\chi'/2)\right),\quad \arg\tilde V_{ln}^{(n-1)}(\chi') = \operatorname{sgn}\chi'\cdot\arg\tilde V_{ln}^{(-)}(\operatorname{sh}(\chi'/2)).$$

Очевидно, что введенные функции являются аналитическими в области $0<\operatorname{Im}\chi'\le\pi/2$, непрерывны при $0\le\operatorname{Im}\chi'\le\pi/2$ и для них справедливы оценки

$$\hat V_{ln}\left(\operatorname{sh}(\chi'/2)\right) = O\left(\operatorname{sh}^2(\chi'/2)\right),\quad |\chi'|\to\infty,\quad 0\le\operatorname{Im}\chi'\le\pi/2,\quad n=1,2,\ldots,M_l, \tag{44}$$

если только условия (7) выполняются. Кроме того, функции (42) нигде не обращаются в нуль в области $0<\operatorname{Im}\chi'\le\pi/2$. Следовательно, функции $\ln\hat V_{ln}\left(\operatorname{sh}(\chi'/2)\right)$ являются аналитическими в области $0<\operatorname{Im}\chi'\le\pi/2$, а при $|\chi'|\to\infty$ ведут себя как $\ln\,\operatorname{sh}^2(\chi'/2)$ в силу оценок (44). Поэтому применимо интегральное преобразование Гильберта к действительной и мнимой частям функций $\ln\hat V_{ln}\left(\operatorname{sh}(\chi'/2)\right)$. Тогда для действительных χ' находим

$$\begin{gathered} \operatorname{Im}\ln\hat V_{ln}\left(\operatorname{sh}(\chi'/2)\right) = -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} d\left(\operatorname{sh}(\chi/2)\right)\frac{\operatorname{Re}\ln\hat V_{ln}\left(\operatorname{sh}(\chi/2)\right)}{\operatorname{sh}(\chi/2)-\operatorname{sh}(\chi'/2)} = \\ = -\frac{2\operatorname{sh}(\chi'/2)}{\pi}P\int_0^{\infty} d\chi\frac{\operatorname{ch}(\chi/2)\ln\left[\pi\varepsilon_{ln}A_{ln}(\chi)/2\right]}{\operatorname{ch}\chi-\operatorname{ch}\chi'}\,, \end{gathered}$$

где учли, что

$$\operatorname{Re}\ln \hat{V}_{ln}(\operatorname{sh}(\chi'/2)) = \ln[\pi\varepsilon_{ln}A_{ln}(\chi)/2]\,,\;\; n=1,2,...,M_l\;.$$

Отсюда, принимая во внимание выражения (42) и (43), окончательно получим

$$\left|Q_l\left(\operatorname{cth}\chi'\right)/F_l^W\left(\chi'\right)\right|\prod_{m=1}^{n-1}\cos\delta_l^{V_{lm}}(\chi')\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi') = \sqrt{\pi\varepsilon_{ln}A_{ln}(\chi')/2}\;\times$$
$$\times\exp\left\{-i\operatorname{sgn}\chi'\left[\sum_{j'=1}^{\sigma_l^{(n)}}\operatorname{arctg}\frac{\sin\left(\kappa_{tj'}^{(n)}/2\right)}{\operatorname{sh}\left(\chi'/2\right)}-\sum_{j=1}^{\sigma_l^{(n-1)}}\operatorname{arctg}\frac{\sin\left(\kappa_{tj}^{(n-1)}/2\right)}{\operatorname{sh}\left(\chi'/2\right)}+\right.\right. \tag{45}$$
$$\left.\left.+\frac{\operatorname{sh}\left(\chi'/2\right)}{\pi}P\int_0^\infty d\chi\frac{\operatorname{ch}\left(\chi/2\right)\ln\left[\pi\varepsilon_{ln}A_{ln}\left(\chi\right)/2\right]}{\operatorname{ch}\chi-\operatorname{ch}\chi'}\right]\right\},\;\; n=1,2,...,M_l\;.$$

Заключение

Рассмотрена задача о восстановлении компонент $V_{ln}(r)$ $(n=1,2,...,M_l)$ нелокальной сепарабельной составляющей полного взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс $(m_1 \neq m_2)$ по приращениям $\delta_l^{V_{ln}}(\chi')$ фазового сдвига и энергиям связанных состояний. Локальная часть $W(r)$ полного взаимодействия считается известной и допускает существование $\sigma_l^{(0)}$ связанных состояний. Показано, что решение релятивистской обратной задачи существует и полностью определяется приращениями фазового сдвига и энергиями истинных связанных состояний. При этом частные случаи, когда $\sigma_l^{(n)}=\sigma_l^{(n-1)}-1$, $\sigma_l^{(n-1)}\neq 0$, а $\nu_l^{(n)}=0$ $(\varepsilon_{ln}=1$, $n=1,2,...,M_l)$, как и в нерелятивистском случае [8], должны быть исключены, так как в этих случаях решения (32) уже не являются более регулярными при $x=1$.

Отметим, что предложенный здесь метод восстановления компонент нелокальной сепарабельной составляющей полного взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс фактически сводится к одночастичной обратной задаче. Это связано с тем, что в рамках рассматриваемого РКП-подхода в квантовой теории поля полная энергия двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс в с.ц.и. пропорциональна энергии одной эффективной релятивистской частицы массы m' [25].

Автор выражает глубокую и искреннюю благодарность В.В. Андрееву, Ю.С. Вернову, М.Н. Мнацакановой и А.М. Широкову за интерес к работе, ценные замечания и полезные обсуждения полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базь А.И., Демин В.Ф., Жуков М.В. // ЭЧАЯ. – 1980. – Т. 44. – С. 47.
2. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 77. – № 4. – С. 557; Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – Т. 15. – № 4. – С. 309.
3. Марченко В.А. // Докл. АН СССР. – 1955. – Т. 104. – № 5. – С. 695.
4. Крейн М.Г. // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 76. – № 1. – С. 21; № 3. – С. 345.
5. Агранович З.С., Марченко В.А. Обратная задача теории рассеяния. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1960. – 260 с.
6. Фаддеев Л.Д. // УМН. – 1959. – Т. 14. – № 4. – С. 57; Тр. мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. – 1964. – Т. 73. – С. 314.
7. Gourdin M. and Martin A. // Nuovo Cim. – 1957. – V. 6. – P. 757; 1958. – V. 8. – P. 699.
8. Chadan K. // Nuovo Cim. – 1958. – V. 10. – P. 892; Nuovo Cim. A. – 1967. – V. 157. – P. 510.
9. Bolsterli M. and MacKenzie J. // Physics (N.Y.). – 1965. – V. 2. – P. 141.
10. Tabakin F. // Phys. Rev. – 1969. –V. 177. – P. 1443.
11. Mills R.L. and Reading J.F. // J. Math. Phys. (N.Y.). – 1969. – V. 10. – P. 321.
12. Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. – М.: Мир, 1980.
13. Захарьев Б.Н., Сузько А.А. Потенциалы и квантовое рассеяние: Прямая и обратная задачи. – М.: Энергоатомиздат, 1985.
14. Соколов С.Н. // Препринт ИФВЭ ОТФ 79-139. – Серпухов. – 1979. – 15 с.
15. Соколов С.Н. // ТМФ. – 1978. – Т. 36. – № 2. – С. 193.
16. Logunov A.A. and Tavkhelidze A.N. // Nuovo Cim. – 1963. – V. 29. – P. 380.
17. Kadyshevsky V.G. // Nucl. Phys. B. – 1968. – V. 6. – No. 2. – P. 125.

18. Kadyshevsky V.G. and Mateev M.D. // Nuovo Cim. A. – 1967. – V. 55. – No. 1. – P. 275.
19. Кадышевский В.Г. // ЖЭТФ. – 1964. – Т. 46. – Вып. 2. – С. 654; Вып. 3. – С. 872; Докл. АН СССР. – 1965. – Т. 160. – С. 573.
20. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., and Skachkov N.B. // Nuovo Cim. A. – 1968. – V. 55. – P. 233.
21. Матвеев В.А., Саврин В.И., Сисакян А.Н., Тавхелидзе А.Н. // ТМФ. – 2002. – Т. 132. – С. 267.
22. Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н. // ЯФ. – 2000. – Т. 63. – С. 915; 2001. – Т. 64. – С. 1358.
23. Бойкова Н.А., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н. // ЯФ. – 2001. – Т. 64. – С. 986.
24. Ebert D., Faustov R.N., and Galkin V.O. // Phys. Rev. D. – 2003. – V. 67. – P. 014027; 2005. – V. 72. – P. 034026; 2007. – V. 75. – P. 074008; Mod. Phys. Lett. A. – 2005. – V. 20. – P. 1887; Phys. Lett. B. – 2006. – V. 634. – P. 214; 2008. – V. 659. – P. 612.
25. Кадышевский В.Г., Матеев М.Д., Мир-Касимов Р.М. // ЯФ. – 1970. – Т. 11. – С. 692.
26. Черниченко Ю.Д. // Изв. вузов. Физика. – 2010. – Т. 53. – № 11. – С. 65.
27. Черниченко Ю.Д. // ЯФ. – 2005. – Т. 68. – С. 43.
28. Черниченко Ю.Д. // ЯФ. – 2004. – Т. 67. – С. 433.

Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого,
г. Гомель, Республика Беларусь
E-mail: chern@gstu.by

Поступила в редакцию 20.05.11,
после доработки – 05.03.12.

Черниченко Юрий Дмитриевич, к.ф.-м.н., доцент каф. высшей математики.