Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

О КОНГРУЕНЦИЯХ АЛГЕБР

(Представлено академиком В. И. Смирновым 13 II 1953)

1. Под алгеброй (1) в дальнейшем понимается множество M, в котором определены операции f_α ($\alpha \in A$, A — некоторое множество, быть может, бесконечное), т. е. однозначные отображения множества всех последовательностей $(m_1, \ldots, m_{n_\alpha})$, где $m_i \in M$, а n_α — натуральные числа, в M. Так определенную алгебру будем обозначать через (M, f_α, A), или, короче, M_A. Конечность числа аргументов каждой операции алгебры далее не будет играть существенной роли и может быть, вообще говоря, отброшена (при этом под операцией f_α следует понимать отображение в M множества всех отображений в M некоторого порядкового типа $\mathfrak{n}_\alpha$). Мы не делаем это лишь для простоты записи. Подмножество M, замкнутое относительно всех операций f_α и рассматриваемое совместно с этими операциями, называется подалгеброй M_A. Прямым произведением алгебры M_A на алгебру R_A называется алгебра P_A, где P есть множество всех упорядоченных пар $\langle m, r\rangle$ ($m \in M$ и $r \in R$), причем положено

$$f_\alpha(\langle m_1, r_1\rangle, \ldots, \langle m_{n_\alpha}, r_{n_\alpha}\rangle) = \langle f_\alpha(m_1, \ldots, m_{n_\alpha}), f_\alpha(r_1, \ldots, r_{n_\alpha})\rangle,$$

каковы бы ни были $m_i \in M$, $r_i \in R$ и $\alpha \in A$. Прямое произведение алгебр M_A и R_A обозначается через $M_A \times R_A$. Отношением на множестве называется, как известно, всякое множество упорядоченных пар его элементов. Конгруенцией алгебры M_A называется такое отношение эквивалентности (т. е. рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение) φ на множестве M, что как только $\langle x_i, y_i\rangle \in \varphi$ $(i = 1, \ldots, n_\alpha)$, так

$$\langle f_\alpha(x_1, \ldots, x_{n_\alpha}), f_\alpha(y_1, \ldots, y_{n_\alpha})\rangle \in \varphi \qquad (1)$$

при всяком $\alpha \in A$. Всякое подмножество $M_A \times M_A$ есть, по определению, некоторое множество упорядоченных пар элементов M, т. е. является некоторым отношением на M. Поэтому уместно говорить о подмножествах эквивалентности этого прямого произведения, о его подалгебрах эквивалентности и т. п.

Теорема. *Для того чтобы отношение φ на M было конгруенцией алгебры M_A, необходимо и достаточно, чтобы φ было подалгеброй эквивалентности $M_A \times M_A$.*

Доказательство. Необходимость. Если φ есть конгруенция M_A, то φ, по определению, является подмножеством эквивалентности $M_A \times M_A$. Докажем замкнутость φ относительно f_α $(\alpha \in A)$. Пусть $\langle x_i, y_i\rangle \in \varphi$ $(x_i, y_i \in M;\ i = 1, \ldots, n_\alpha)$. Тогда, ввиду конгруентности φ, выполняется (1), и φ оказывается тем самым подалгеброй прямого произведения $M_A \times M_A$.

Достаточность. Пусть φ — подалгебра эквивалентности $M_A \times M$ и $\langle x_i, y_i\rangle \in \varphi$ ($x_i, y_i \in M$; $i = 1, \ldots, n_\alpha$). Тогда, ввиду замкнутости φ относительно каждой из операций f_α, при всяком $\alpha \in A$ выполняется (1), т. е. φ оказывается конгруенцией M_A.

2. Пересечение любого непустого семейства подалгебр M_A также есть подалгебра M_A. Если считать нижним пределом двух подалгебр M_A их пересечение, а верхним их пределом — пересечение всех подалгебр M_A, содержащих обе эти подалгебры, то, как известно ([1]), частично упорядоченное по включению семейство всех подалгебр M_A образует структуру и притом полную. Пересечение любого непустого семейства подалгебр эквивалентности $M_A \times M_A$ есть, как нетрудно проверить, снова подалгебра эквивалентности $M_A \times M_A$. Как и в случае произвольных подалгебр, нетрудно убедиться в том, что семейство всех подалгебр эквивалентности данной алгебры образует структуру также полную. Это утверждение является переформулировкой теоремы о том, что все конгруенции алгебры образуют полную структуру ([1]).

3. Структура всех конгруенций алгебры M_A является подмножеством структуры всех подалгебр $M_A \times M_A$. Вместе с тем структура всех конгруенций M_A не является, вообще говоря, подструктурой структуры подалгебр $M_A \times M_A$ (если понимать, как это обычно и делается, подструктуру некоторой структуры как ее подалгебру, т. е. подмножество, замкнутое относительно операций взятия верхнего и нижнего пределов).

В качестве примера рассмотрим алгебру N_+ целых положительных чисел с единственной операцией — обычным сложением. Очевидно, подалгебра φ_1 алгебры $N_+ \times N_+$, состоящая из пары $\langle 1,1\rangle$ и всех пар вида $\langle 2n, 2m\rangle$ и $\langle 2n+1, 2m+1\rangle$, где $n, m = 1, 2, \ldots$, является конгруенцией N_+. Точно так же конгруенцией N_+ является подалгебра φ_2 алгебры $N_+ \times N_+$, состоящая из пар $\langle 1,1\rangle$, $\langle 2,2\rangle$ и всех пар вида $\langle 3n, 3m\rangle$, $\langle 3n+1, 3m+1\rangle$ и $\langle 3n+2, 3m+2\rangle$, где $n, m = 1, 2, \ldots$ Всякая конгруенция N_+, содержащая как φ_1, так и φ_2, содержит пары $\langle 2,6\rangle$ и $\langle 6,3\rangle$, т. е. пару $\langle 2,3\rangle$. Однако минимальная подалгебра $N_+ \times N_+$, содержащая φ_1 и φ_2, не содержит пары $\langle 2,3\rangle$, так как система уравнений

$$x_0 + \sum_{n, m=1}^{\infty} (2nx_{nm1} + (2n+1)\, x_{nm2} + 3nx_{nm3} + (3n+1)\, x_{nm4} + (3n+2)\, x_{nm5}) = 2,$$

$$x_0 + \sum_{n, m=1}^{\infty} (2mx_{nm1} + (2m+1)\, x_{nm2} + 3mx_{nm3} + (3m+1)\, x_{nm4} + (3m+2)\, x_{nm5}) = 3$$

в целых неотрицательных числах, очевидно, неразрешима.

Для отдельных классов алгебр (например для групп) структура конгруенций алгебры является подструктурой структуры подалгебр ее прямого квадрата. (Заметим, что для групп справедливо даже более сильное утверждение: всякая рефлексивная симметричная подгруппа $G \times G$ является конгруенцией группы G.) Встает естественный вопрос: какие условия, налагаемые на алгебру M_A, необходимы и достаточны для того, чтобы структура всех конгруенций M_A являлась подструктурой структуры всех подалгебр $M_A \times M_A$?

Поступило
11 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Биркгоф, Теория структуры, ИЛ, 1952.