Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 4

МАТЕМАТИКА

В. И. БУРДИНА*

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 2 X 1953)

В заметке ([1]) рассматривался вопрос об ограниченности решений системы дифференциальных уравнений 2-го порядка с периодическими коэффициентами

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = P(t)\bar{x}; \quad P(t+\omega) = P(t). \tag{1}$$

Задача свелась к оценке характеристических показателей такой же системы, подчиненной дополнительному условию

$$\operatorname{Spur} P(t) \equiv 0. \tag{2}$$

В дальнейшем рассматриваются системы только этого типа.

На многообразии систем (1) с характеристическим показателем $\lambda > 0$ была построена пара функций (экстремальные угловые отклонения решений (1) за период ω):

$$\Psi_{1,2} = k\pi \pm \arccos \frac{1 \pm \cos\beta \operatorname{ch}\lambda\omega}{\operatorname{ch}\lambda\omega \pm \cos\beta}. \tag{3}$$

Знание значений этих функций на системе (1) позволяет восстановить характеристические показатели системы, а приближенное знание дает оценку характеристических показателей (при $\lambda = 0$ $k\pi \leqslant \Psi_{1,2} \leqslant (k+1)\pi$).

В настоящей заметке функции $\Psi_{1,2}$ строятся по исходным данным системы (1). Именно, показывается, что значения функций $\Psi_{1,2}$ совпадают с экстремумами некоторых функционалов; число варьируемых функций этих функционалов сводится к двум.

Тем самым доказано, что критерий из ([1]) является точным.

1. Рассмотрим пару функций

$$\begin{aligned} \psi_1(P, k) &= k\pi + \int_0^\omega h_{\max}(\tau)\,d\tau, \\ \psi_2(P, k) &= k\pi - \int_0^\omega h_{\min}(\tau)\,d\tau, \end{aligned} \tag{4}$$

где k — целое число; $h_{\max}$, $h_{\min}$ — наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы

$$H = -IP, \quad \text{где} \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Лемма. *С точностью до слагаемого $k\pi$ выражения в правых частях* (4) *остаются неизменными при переходе к новым координатам по формуле*

$$\bar{y} = C\bar{x}, \tag{6}$$

где C — ортогональная матрица.

Доказательство производится непосредственной проверкой.

2. Рассмотрим множество матриц P с характеристическим показателем $\lambda > 0$, чьи фундаментальные системы решений могут отличаться только на ортогональное преобразование (6). Пользуясь леммой и каноническим представлением фундаментальной системы решений (1), даваемым теоремой Ляпунова о приводимости, можно показать, что различные такие множества отличаются друг от друга значением параметров: λ — характеристический показатель; параметр β, $-\infty < \beta < \infty$, и k — целое число, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и некоторыми другими параметрами. Обозначим через $\mathscr{P}_{\lambda, \beta, k}$ множество матриц с одинаковыми значениями λ, β, k.

Теорема. *Нижняя (верхняя) грань функционала $\psi_1(P, 0)$, $(\psi_2(P, 0))$ на множестве $\mathscr{P}_{\lambda, \beta, k}$ достигается и совпадает со значением функции $\Psi_1(\Psi_2)$ на этом множестве*:

$$\min_{\mathscr{P}_{\lambda, \beta, k}} \int_0^\omega h_{\max}(\tau)\, d\tau = k\pi + \arccos \frac{1 + \operatorname{ch} \lambda\omega \cos\beta}{\operatorname{ch} \lambda\omega + \cos\beta};$$

$$\max_{\mathscr{P}_{\lambda, \beta, k}} \int_0^\omega h_{\min}(\tau)\, d\tau = k\pi - \arccos \frac{1 - \operatorname{ch} \lambda\omega \cos\beta}{\operatorname{ch} \lambda\omega - \cos\beta},$$

где $h_{\max}$, $h_{\min}$ — наибольшее и наименьшее характеристические числа матрицы $H = -IP$.

Доказательство. В силу леммы достаточно рассмотреть множество $\mathscr{P}_{\lambda, \beta} = \mathscr{P}_{\lambda, \beta, 0}$.

Из матриц множества $\mathscr{P}_{\lambda, \beta}$, дающих одно и то же значение функционалам (4), выбираем одну, с наиболее простым строением:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ 0 & -p_{11} \end{pmatrix}; \quad p_{11} = \lambda + \delta'(t); \quad p_{12} = e^{2\delta}(\alpha' - 2\alpha\lambda - 2\lambda \operatorname{ctg}\beta), \tag{7}$$

где $\alpha(t)$, $\delta(t)$ — произвольные периодические непрерывные и дифференцируемые функции, подчиненные краевым условиям

$$\alpha(0) = \alpha(\omega) = 0; \quad \delta(0) = \delta(\omega) = 0. \tag{8}$$

Задача свелась к нахождению экстремумов функционалов $\psi_{1,2}$ по только что охарактеризованным функциям $\alpha(t)$, $\delta(t)$. Рассмотрим сначала функционал ψ_1.

Соответствующая система уравнений Эйлера, как показывает подсчет, вырождается в одно уравнение:

$$4\left(\frac{p_{12}^2}{4} + p_{11}^2\right)\left(\frac{p_{12}}{2} + \sqrt{\frac{p_{12}^2}{4} + p_{11}^2}\right) = p_{12}p_{11}' - p_{12}p_{11}',$$

где p_{12}, p_{11} взяты из (7).

При переходе к полярным координатам по формулам $p_{12}/2 = \rho\cos\varphi$, $p_{11} = \rho\sin\varphi$ переменные разделяются:

$$2\rho = \frac{\varphi'}{1 + \cos 2\varphi}. \tag{9}$$

Краевые условия (8) в новых переменных принимают вид:

$$\cos\frac{\varphi(\omega)}{2}=\cos\frac{\varphi(0)}{2}e^{-\lambda\omega},$$
$$\sin\varphi(\omega)-\sin\varphi(0)=-2\cos^2\frac{\varphi(0)}{2}\operatorname{ctg}\beta\cdot(1-e^{-2\lambda\omega}). \tag{10}$$

Выбираем функцию $\varphi(t)$ по условию (10) и дополнительному условию

$$\varphi'\geqslant 0;\quad \varphi'(0)=\varphi'(\omega)=0,$$

вытекающему из уравнения (9).

Искомое экстремальное значение в силу уравнения (9) оказывается равным разности $\frac{\varphi(\omega)}{2}-\frac{\varphi(0)}{2}$, которая, как показывает совместное решение уравнений (10), совпадает с требуемым значением функционала.

Для функционала ψ_2 доказательство протекает тем же путем.

Утверждаемый характер экстремумов следует из неравенств заметки [1].

3. Можно показать, что для систем (1) с характеристическим показателем $\lambda=0$ экстремальные значения функционалов (4) лежат на отрезке $[k\pi,\ (k+1)\pi]$.

Возвращаемся к вопросу определения характеристических показателей системы (1). Из предыдущих пунктов следует, что

$$\Psi_1(P)=\min\int_0^\omega h_{\max}(\tau)\,d\tau,\qquad \Psi_2(P)=\max\int_0^\omega h_{\min}(\tau)\,d\tau, \tag{11}$$

где $h_{\max}$, $h_{\min}$ взяты, как и в (4), а экстремумы берутся по всевозможным матрицам, в которые переходит матрица P из (1) после замены переменных по формуле:

$$\bar{y}=\begin{pmatrix}e^{\delta} & e^{\delta}\alpha\\ 0 & e^{-\delta}\end{pmatrix}\bar{x}; \tag{12}$$

δ, α — функции из (7), (8).

Заменяя в (11) знаки $=$ на $\geqslant$ и, соответственно, на $\leqslant$, подставляя вместо $\Psi_{1,2}$ их выражение из (3); беря интегралы в правых частях по какой-нибудь из допустимых матриц, получим достаточное условие того, чтобы характеристические показатели системы (1) не превосходили λ (взятого из $\Psi_{1,2}$).

4. Рассмотрим уравнение

$$y''+p(t)y=0. \tag{13}$$

Заменой $y=u$, $y'=v$ оно приводится к системе типа (1) с матрицей

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ p(t) & 0\end{pmatrix}.$$

Полагая в (12) $\alpha\equiv 0$, $\delta\equiv c=\text{const}$, заменяя в (11) знаки $=$ на $\geqslant$ и, соответственно, на $\leqslant$, беря в качестве $\Psi_{1,2}$ числа $(k+1)\pi$, $k\pi$, получим критерий [2] ограниченности решений уравнения (13).

Аналогичным путем для уравнения (13) с дифференцируемой функцией $p(t)\geqslant 0$, имеющей на отрезке $[0,\omega]$ конечное число точек максимума и минимума, получается:

Критерий. *Пусть* $i_1, \ldots, i_s$ — *точки максимумов, а* $j_1, \ldots, j_s$ — *точки минимумов функции* $p(t) \geqslant 0$ *из* (13). *Если*

$$k\pi \leqslant \int_0^\omega \sqrt{p(\tau)}\, d\tau - \frac{1}{4} \ln \frac{p(i_1) \ldots p(i_s)}{p(j_1) \ldots p(j_s)},$$

$$\int_0^\omega \sqrt{p(\tau)}\, d\tau + \frac{1}{4} \ln \frac{p(i_1) \ldots p(i_s)}{p(j_1) \ldots p(j_s)} \leqslant (k+1)\pi,$$

то все решения (13) *ограничены при* $t \to +\infty$.

Поступило
27 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Бурдина, ДАН, **90**, № 3 (1953). [2] В. А. Якубович, ДАН, **78**, № 2 (1951).