Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 4

МАТЕМАТИКА

М. Л. БРОДСКИЙ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАЗНОСТНЫМИ МЕТОДАМИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 X 1953)

Рассмотрим систему r обыкновенных дифференциальных уравнений, которую мы будем записывать как одно дифференциальное уравнение для вектора r-мерного пространства:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \tag{1}$$

(при начальном условии $\mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y}_0$).

Мы будем рассматривать случай, когда уравнение (1) приближенно решается разностным методом типа

$$\mathbf{y}_n-\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\mathbf{y}_{n-j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j\mathbf{f}_{n-j}. \tag{2}$$

Будем полагать, что приближенное решение уравнения (1) ищется на сегменте $[x_0, X]$; пусть $\mathbf{y}_n$ — приближенное значение решения в точке $x_n=x_0+nh$; $\mathbf{y}(x_n)$ — точное решение в этой же точке, $\overline{\Delta}_n=\mathbf{y}_n-\mathbf{y}(x_n)$; $A(x)$ — матрица $\left\|\frac{\partial f^{(p)}}{\partial y^{(q)}}\right\|_{p,\,q=1}^{r}$ в точке $(x, \mathbf{y}(x))$; A_n — та же матрица со значениями, вычисленными в некоторых промежуточных точках так, что $\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)-\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}(x_n))=A_n\overline{\Delta}_n$; $\overline{\rho}_n$ — ошибка метода, т. е. погрешность при подстановке в формулу (2) точного решения $\mathbf{y}(x_n)$; $\overline{\eta}_n$ — погрешность вычисления по формуле (2) (включая погрешность округления); $\overline{\delta}_n=\overline{\eta}_n-\overline{\rho}_n$; $\overline{\Delta}_0, \overline{\Delta}_1, \ldots, \overline{\Delta}_{k-1}$ — начальные погрешности, т. е. значения $\mathbf{y}_n-\mathbf{y}(x_n)$ в первых k узлах.

Будем также предполагать, что все корни характеристического уравнения

$$\lambda^k-\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\lambda^{k-j}=0 \tag{3}$$

не превышают по модулю единицы и что все они, кроме, быть может, нуля, — простые. Будем искать выражение $\overline{\Delta}_m$ $(m\geqslant k)$ через $\overline{\Delta}_0, \ldots, \overline{\Delta}_{k-1}, \overline{\delta}_k, \ldots, \overline{\delta}_m$.

Очевидно, $\overline{\Delta}_n$ удовлетворяет разностному уравнению

$$\overline{\Delta}_n-\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\overline{\Delta}_{n-j}-h\sum_{j=0}^{k}\beta_jA_{n-j}\overline{\Delta}_{n-j}=\overline{\delta}_n. \tag{4}$$

Обозначим $B(x)=A^{*}(x_m-x)$; $B_n=A^{*}_{m-n}$. Построим векторы $\mathbf{z}_n^{(t)}$ ($t=1, 2, \ldots, r$; $n=0, 1, \ldots, m-k$), удовлетворяющие однородному разностному уравнению

$$\mathbf{z}_n^{(t)}-\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\mathbf{z}_{n-j}^{(t)}-hB_n\sum_{j=0}^{k}\beta_j\mathbf{z}_{n-j}^{(t)}=0 \tag{5}$$

при начальных условиях

$$\mathbf{z}_0^{(t)}-h\beta_0B_0\mathbf{z}_0^{(t)}=\mathbf{e}^{(t)} \tag{6}$$

($\mathbf{e}^{(t)}$ — орты r-мерного пространства),

$$\mathbf{z}_n^{(t)}-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathbf{z}_{n-j}^{(t)}-hB_n\sum_{j=0}^{n}\beta_j\mathbf{z}_{n-j}^{(t)}=0 \quad (1\leqslant n\leqslant k-1). \tag{7}$$

Тогда мы получим формулу:

$$(\overline{\Delta}_m,\mathbf{e}^{(t)})=\sum_{n=0}^{m-k}(\overline{\delta}_{m-n},\mathbf{z}_n^{(t)})+$$

$$+\sum_{n=m-k+1}^{m}\left(\overline{\Delta}_{m-n},\sum_{j=n-m+k}^{k}\alpha_j\mathbf{z}_{n-j}^{(t)}+hB_n\sum_{j=n-m+k}^{k}\beta_j\mathbf{z}_{n-j}^{(t)}\right), \tag{8}$$

дающую все проекции искомого вектора $\overline{\Delta}_m$.

Полагая $|\overline{\Delta}_i|=O(h)$ $(0\leqslant i<k)$, $|\overline{\delta}_n)=O(h^2)$, имеем в силу условия, наложенного на корни уравнения (3) (см. [1]): $|\overline{\Delta}_m|=O(h)$ $(x_0\leqslant x_m\leqslant X)$, и, предполагая существование и непрерывность на сегменте $[x_0, X]$ вторых частных производных типа $\dfrac{\partial^2 f^{(p)}}{\partial y^{(q)}\partial y^{(s)}}$, получим:

$$\| B_n-B(nh)\|=O(h) \tag{9}$$

(в частном случае линейной системы (9) тривиальным образом выполняется и без этих предположений).

При соблюдении неравенства (9) можно показать, что решение разностного уравнения (5) можно аппроксимировать при помощи решений некоторых дифференциальных уравнений. В самом деле, имеет место

Лемма. *Если λ_p — один из отличных от нуля корней уравнения* (3),

$$\sigma_p\equiv\sigma(\lambda_p)=\frac{\sum\limits_{j=0}^{k}\beta_j\lambda_p^{k-j}}{\sum\limits_{j=1}^{k}j\alpha_j\lambda_p^{k-j}}, \tag{10}$$

$\mathbf{u}(x)$ — *решение дифференциального уравнения*

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx}=\sigma_pB(x)\,\mathbf{u}, \tag{11}$$

$$\mathbf{u}_n=\lambda_p^n\mathbf{u}(nh) \tag{12}$$

и имеет место (9), *то*

$$\left|\mathbf{u}_n-\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\mathbf{u}_{n-j}-hB_n\sum_{j=}^{k}\beta_j\mathbf{u}_{n-j}\right|=O(h^2). \tag{13}$$

Опираясь на эту лемму, можем доказать следующую теорему:

Теорема. *Решение уравнения* (5) *при начальных условиях* (6) *и* (7) *выражается формулой*

$$\mathbf{z}_n^{(t)} = \sum_{p=1}^{l} \tau_p \lambda_p^n \mathbf{u}^{(p,\,t)}(nh) + O(h), \tag{14}$$

где

$$\tau_p = \frac{\lambda_p^k}{\sum\limits_{j=1}^{k} j\alpha_j \lambda_p^{h-j}}; \tag{15}$$

l — число отличных от нуля корней уравнения (3); $\mathbf{u}^{(p,\,t)}(x)$ — *решение уравнения* (11) *при начальном условии* $\mathbf{u}(0) = \mathbf{e}^{(t)}$.

Доказательство. Решение разностного уравнения (5) при начальных условиях (6) — (7) сводится к решению того же уравнения при условии (6) и $\mathbf{z}_{-1}^{(t)} = \ldots = \mathbf{z}_{-(k-1)}^{(t)} = 0$.

Разлагая в l-мерном пространстве вектор $(0, 0, \ldots, 1)$ по векторам $(\lambda_p^{-(l-1)}, \ldots, \lambda_p^{-1}, 1)$ $(p = 1, 2, \ldots, l)$, сведем искомое решение к сумме решений $\mathbf{z}_n^{(p,\,t)}$ с начальными условиями $(\lambda_p^{-(k-1)}\mathbf{e}^{(t)}, \ldots, \mathbf{e}^{(t)})$ с коэффициентами τ_p и решения, для которого значения в нулевом, -1-м, ..., $-(l-1)$-м узлах равны нулю и которое поэтому при $n \geqslant 0$ равно $O(h)$.

Рассматривая разность $\mathbf{v}_n^{(p,\,t)} = \mathbf{z}_n^{(p,\,t)} - \lambda_p^n \mathbf{u}_p^{(t)}(nh)$, получим, что значения $\mathbf{v}_n^{(p,\,t)}$ при $n = 0, -1, \ldots, -(l-1)$ имеют порядок $O(h)$, и для $\mathbf{v}_n^{(p,\,t)}$ справедливо (13), откуда $\mathbf{v}_n^{(p,\,t)} = O(h)$ на всем рассматриваемом сегменте. Теорема доказана.

Следствие. *При рассматриваемых условиях*

$$\overline{\Delta}_m = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{p=1}^{l} \tau_{pi} \lambda_p^{m-i} \mathbf{s}_p(\overline{\Delta}_i, k, m) + \sum_{n=k}^{m} \sum_{p=1}^{l} \tau_p \lambda_p^{m-h} \mathbf{s}_p(\overline{\delta}_n, n, m) + O(h^2), \tag{16}$$

где

$$\tau_{pi} = \frac{\sum\limits_{j=k-i}^{k} \alpha_j \lambda_p^{k-j}}{\sum\limits_{j=1}^{k} j\alpha_j \lambda_p^{h-j}}; \tag{17}$$

$\mathbf{s}_p(\mathbf{v}, n, m)$ — *решение векторного линейного дифференциального уравнения*

$$\frac{d\mathbf{z}}{dx} = \sigma_p A(x)\,\mathbf{z} \tag{18}$$

в точке x_m при начальных условиях $\mathbf{z}(x_n) = \mathbf{v}$.

Это следствие вытекает из свойств сопряженных дифференциальных уравнений.

Остановимся на некоторых частных случаях.

1. Для метода Адамса (с пересчетом или без пересчета) единственный отличный от нуля корень $\lambda_1 = 1$; $\sigma_1 = \tau_1 = 1$;

$$\overline{\Delta}_m = \sum_{n=k-1}^{m} \mathbf{s}_1(\tilde{\delta}_n, n, m) + O(h^2), \tag{19}$$

где $\tilde{\delta}_n = \overline{\delta}_n$ $(n \geqslant k)$; $\tilde{\delta}_n = \overline{\Delta}_n$ $(n < k)$.

2. Для метода Милна

$$\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n-4} = h\left(\frac{8}{3}\mathbf{f}_{n-1} - \frac{4}{3}\mathbf{f}_{n-2} + \frac{8}{3}\mathbf{f}_{n-3}\right). \tag{20}$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$; $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -{}^5/_3$, $\sigma_3 = \sigma_4 = {}^1/_3$; $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = {}^1/_4$.

Имеем:

$$\overline{\Delta}_m = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{m}\sum_{p=1}^{4} \mathbf{s}_p(\widetilde{\delta}_n, n, m). \tag{21}$$

Для случая, когда система (1) сводится к одному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

формула (21) приобретает вид:

$$\Delta_m = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{m}\left[\exp\left(\int_{x_n}^{x_m}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\right) + (-1)^{m-n}\exp\left(-\frac{5}{3}\int_{x_n}^{x_m}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\right) + \right.$$
$$\left. + (i^{m-n} + (-i)^{m-n})\exp\left(\frac{1}{3}\int_{x_n}^{x_m}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\right)\right]\widetilde{\delta}_n + O(h^2). \tag{22}$$

Из этой формулы видна неустойчивость метода Милна для устойчивых уравнений и систем ([1]). Заметим, что эта неустойчивость имеет место лишь для ошибок округления, так как для ошибок метода в силу их гладкости члены формулы (21), соответствующие $p = 2, 3, 4$, имеют порядок $O(h^2)\,|\eta|$.

3. Для метода Симпсона.

$$\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n-2} = h\,({}^1/_3\mathbf{f}_n + {}^4/_3\,\mathbf{f}_{n-1} + {}^1/_3\,\mathbf{f}_{n-2}), \tag{23}$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1;\ \sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = -{}^1/_3;\ \tau_1 = \tau_2 = {}^1/_2,$$

$$\overline{\Delta}_m = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m}\sum_{p=1}^{2}\lambda_p^{m-n}\mathbf{s}_p(\widetilde{\delta}_n, n, m) + O(h^2). \tag{24}$$

Заметим, что из точной формулы (8) могут быть получены и более точные приближенные формулы, чем, например, (24). Например, полагая $|\overline{\Delta}_i| = O(h^3)$ $(0 \leqslant i < k)$, $|\overline{\delta}_n| = O(h^3)$, имеем:

$$\overline{\Delta}_m = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m}\left[\mathbf{s}_1(\widetilde{\delta}_n, n-1, m) + (-1)^{m-n}\,\mathbf{s}_2(\widetilde{\delta}_n, n-1, m)\right] + O(h^4).$$

Формула (25) была испытана на нескольких примерах: вносилась одна «искусственная» погрешность $\overline{\delta}_n$ и измерялись $\overline{\Delta}_m$ при $m \geqslant n$; совпадение погрешностей с поправками, вычисленными по формуле (25), получилось весьма хорошим.

Поступило
3 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Р. Шура-Бура, Прикладн. матем. и мех., **16**, в. 5, 375 (1952).