**Доклады Академии Наук СССР**
**1953. Том XCIII, № 4**

*МАТЕМАТИКА*

Ю. М. БЕРЕЗАНСКИЙ

# ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ПО ЕГО СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 X 1953)*

Известно, что так же, как и якобиева матрица, уравнение Штурма—Лиувилля на полуоси однозначно определяется заданием спектральной функции [1]. В заметке [2] нами была установлена подобная теорема единственности для уравнений в частных разностях. В этой заметке будет получен аналогичный результат для двумерного уравнения Шредингера

$$L[u] = -\Delta u + c(x, y)u = \lambda u, \qquad (1)$$

где $c(x, y)$ вещественна и кусочно аналитична*. Мы ограничимся наиболее простым случаем краевой задачи в полуплоскости $x \geqslant 0$ с граничным условием $u_x(0, y) = 0$ $(-\infty < y < \infty)$.

1°. Обозначим через $\mathfrak{H}$ гильбертово пространство суммируемых с квадратом в полуплоскости $x \geqslant 0$ функций. Пусть $D_A \subset \mathfrak{H}$ — совокупность всех финитных (т. е. дважды непрерывно дифференцируемых и равных нулю вне конечной области) функций, удовлетворяющих условию $f_x(0, y) = 0$ $(-\infty < y < \infty)$. Положим $Af = L[f]$ $(f \in D_A)$**; оператор $A$, очевидно, эрмитов. Повторяя рассуждения А. Я. Повзнера [3], можно показать что разложение единицы $E_\lambda$, отвечающее некоторому самосопряженному расширению оператора $A$, порождается спектральной функцией $\vartheta(p, q; \lambda)$ ($p$, $q$ — точки полуплоскости $x \geqslant 0$, $-\infty < \lambda < \infty$), т. е. для каждого конечного интервала $\Delta$ и любого $f \in \mathfrak{H}$ $E_\Delta f = \int \vartheta(p, q; \Delta) f(q)\, dq$, где интегрирование распространяется на всю правую полуплоскость, а $\vartheta(p, q; \Delta) = \vartheta(p, q; \lambda_2) - \vartheta(p, q; \lambda_1)$ $(\Delta = (\lambda_1, \lambda_2])$. Функция $\vartheta(p, q; \lambda) = \overline{\vartheta(q, p; \lambda)}$ может быть продифференцирована по некоторой неубывающей функции $\rho(\lambda)$: $d\vartheta(p, q; \lambda) = \psi(p, q; \lambda)\, d\rho(\lambda)$. Ее производная $\psi(p, q; \lambda)$ как функция от $p$ ($q$) дважды непрерывно дифференцируема, удовлетворяет по каждому из этих переменных уравнению (1) и граничному условию $\psi_x((0, y), q, \lambda) = 0$ $(\psi_x(p, (0, y); \lambda) = 0)$. Спектральным ядром $\tau(\alpha, \beta; \lambda)$ будем называть граничное значение функции $\vartheta(p, q; \lambda)$, т. е. $\tau(\alpha, \beta; \lambda) = \vartheta((0, \alpha), (0, \beta); \lambda)$ $(-\infty < \alpha, \beta, \lambda < \infty)$; отметим, что ядра $\tau(\alpha, \beta; \Delta)$ и $\vartheta(p, q; \Delta)$ положительно-определенны. Справедлива следующая теорема единственности:

---

* Дважды непрерывно дифференцируемую функцию $f(x, y)$, заданную в некоторой замкнутой области $G$, будем называть кусочно-аналитической, если $G$ можно разбить на связные замкнутые конечные области $G_j$, в каждой из которых $f(x, y)$ является аналитической функцией двух переменных, причем в каждой конечной части плоскости расположено только конечное число областей $G_j$.

** В рассмотрениях пунктов 1° и 3°, за исключением теоремы 1, достаточно считать, что $c(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема.

Теорема 1. *Обозначим через* $\tau_1(\alpha, \beta; \lambda)$ *и* $\tau_2(\alpha, \beta; \lambda)$ *спектральные ядра краевых задач* $-\Delta u + c_1(x, y)u = \lambda u$, $u_x(0, y) = 0$, $x \geqslant 0$ *и* $-\Delta u + c_2(x, y)u = \lambda u$, $u_x(0, y) = 0$, $x \geqslant 0$, *где* $c_1(x, y)$ *и* $c_2(x, y)$ — *вещественные кусочно-аналитические функции. Если существует такой интервал* $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, *что* $\tau_1(\alpha, \beta; \lambda) = \tau_2(\alpha, \beta; \lambda)$ *при* $\alpha, \beta \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$ *и* $-\infty < \lambda < \infty$, *то* $c_1(x, y) = c_2(x, y)$ *в полуплоскости* $x \geqslant 0$.

2°. Для доказательства этой теоремы нам понадобятся некоторые факты относительно решений гиперболических уравнений. Положим $\Box u = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy}$, $\Gamma(P_1, P_2) = [(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2]^{1/2}$ и обозначим через $\Phi_P$ внутренность нижней полы конуса $\Gamma^2(P, Q) = 0$ $(P = (x, y, t),\ t > 0)$, ограниченной снизу плоскостью $t = 0$. Будем говорить что функция $f(x, y, t) = f(Q)$ $(Q \in \overline{\Phi_P})$ принадлежит к классу $\Omega_P$, если она непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема по $x$ и $y$, за исключением, возможно, некоторой плоскости $x = \text{const}$, где производные по $x$ могут терпеть конечный разрыв. Используя идеи М. Рисса ([4]), можно установить следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть* $u(x, y, t)$ — *дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения* $\Box u - a(x, y, t)u = f(x, y, t)$ $(a, f \in \Omega_{P_0})$, *удовлетворяющее некоторым начальным условиям при* $t = 0$. *Тогда решение уравнения*

$$\Box v - [a(x, y, t) + \alpha(x, y, t)]\, v = f(x, y, t) + \varphi(x, y, t) \quad (\alpha, \varphi \in \Omega_{P_0}), \tag{2}$$

*удовлетворяющее начальным условиям* $v(x, y, 0) = u(x, y, 0)$ *и* $v_t(x, y, 0) = u_t(x, y, 0)$, *при* $t_0 > 0$ $((x_0, y_0, t_0) = P_0)$ *достаточно малом существует, дважды непрерывно дифференцируемо по всем переменным внутри конуса* $\Phi_{P_0}$ *и имеет вид*

$$v(P) = u(P) + \int\limits_{\Phi_P} D(P, Q)\,[\alpha(Q)\, u(Q) + \varphi(Q)]\, dQ, \tag{3}$$

*где ядро* $D(P, Q)\,\Gamma(P, Q)$ *непрерывно относительно* $(P, Q)$ $(Q \in \Phi_P)$ *и ограничено при изменении* $P$ *в конечной области.*

Наметим вкратце доказательство. Путем непосредственной проверки можно убедиться, что если функция $\mu(Q) \in \Omega_{P_0}$, то функция $g(P) = \int\limits_{\Phi_P} \mu(Q)\,\Gamma^{-1}(P, Q)\, dQ$ $(P \in \Phi_{P_0})$ дважды непрерывно дифференцируема по всем переменным и удовлетворяет уравнению $\Box g = 2\pi\mu$. Будем искать решение уравнения (2) в виде

$$v(P) = u(P) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Phi_P} \frac{\mu(Q)}{\Gamma(P, Q)}\, dQ, \tag{4}$$

где $\mu(Q) \in \Omega_{P_0}$. Применяя к (4) оператор $\Box - (a + \alpha)$, заключаем, что в качестве $\mu$ следует взять решение уравнения $\mu(P) = h(P) + (CH\mu)(P)$, где $h(P) = \alpha(P)\, u(P) + \varphi(P)$, а операторы $C$ и $H$ определяются формулами $(Cg)(P) = \frac{1}{2\pi}[a(P) + \alpha(P)]\, g(P)$, $(Hg)(P) = \int\limits_{\Phi_P} g(Q)\Gamma^{-1}(P, Q)\, dQ$.

Это решение запишется в виде $\mu(x, y, t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (CH)^n h$ $((x, y, t) \in \Phi_{P_0})$, причем ряд будет сходиться равномерно, так как норму оператора $H$ можно сделать сколь угодно малой путем уменьшения $t_0 > 0$. Более того, дифференцируя этот ряд по $x$ и $y$, получим, что $\mu \in \Omega_{P_0}$. Таким образом, решение уравнения (2) существует и имеет вид (4). Используя выражение $\mu = \Sigma (CH)^n h$, можно показать, что это решение будет иметь вид (3).

Замечание. Для ядра $D(P, Q)$ может быть установлена следующая оценка: *если в некотором конусе* $\Phi_{P_0}$ $0 \leqslant c_* \leqslant a(P) + \alpha(P) \leqslant c^*$, *то* $\operatorname{ch}[\sqrt{c_*}\,\Gamma(P, Q)] \leqslant 2\pi\Gamma(P, Q) D(P, Q) \leqslant \operatorname{ch}[\sqrt{c^*}\,\Gamma(P, Q)]$, $Q \in \Phi_P$, $P \in \Phi_{P_0}$.

Положим $D_{a+\alpha}(P, Q) = D(P, Q)$ при $Q \in \Phi_P$ и $= 0$ при $Q \overline{\in} \Phi_P$ ($P, Q$ из полупространства $t \geqslant 0$). Из теоремы 2 вытекает, что интеграл

$$u(P) = \int D_a(P, Q) f(Q)\, dQ \tag{5}$$

является решением уравнения $\Box u + au = f$, удовлетворяющим нулевым начальным условиям. На этом основании при помощи формулы (3) получим следующую зависимость между ядрами $D$:

$$D_{a+\alpha}(P, Q) = D_a(P, Q) + \int D_{a+\alpha}(P, S)\, \alpha(S)\, D_a(S, Q)\, dS. \tag{6}$$

3°. Обозначим через $\gamma(x, y; \lambda)$ дважды непрерывно дифференцируемое в полуплоскости $x \geqslant 0$ решение уравнения (1), для которого $\gamma_x(0, y; \lambda) = 0$. Продолжим $c(x, y)$ и $\gamma(x, y; \lambda)$ на всю плоскость четным образом: $c(-x, y) = c(x, y)$, $\gamma(-x, y; \lambda) = \gamma(x, y; \lambda)$ $(x \geqslant 0)$. Во всей плоскости $\gamma(x, y; \lambda)$ будет дважды непрерывно дифференцируемым решением уравнения (1), поэтому функция $u(x, y, t) = \frac{2}{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda} \frac{t}{2} \gamma(x, y; \lambda)$ $(t \geqslant 0)$, удовлетворяющая нулевым начальным условиям, будет решением уравнения $\Box u + c(x, y) u = \gamma(x, y; \lambda)$. Применяя формулу (5) и используя единственность решения, получим

$$\frac{2}{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda} \frac{t}{2} \gamma(x, y; \lambda) = \int\limits_0^\infty d\tau \iint\limits_{-\infty}^{\infty} D_{-c}(x, y, t; \xi, \eta, \tau)\, \gamma(\xi, \eta; \lambda)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} W_c(x, y, t; \xi, \eta)\, \gamma(\xi, \eta; \lambda)\, d\xi\, d\eta. \tag{7}$$

Ядро $W_c(x, y, t; \xi, \eta)$ аннулируется при $\rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \geqslant t^2$, непрерывно зависит от всех пяти переменных при $0 < \varepsilon \leqslant \rho \leqslant t$ и имеет особенность порядка $\log \rho$ при $\rho \to 0$; следовательно, оно суммируемо с квадратом относительно $\xi, \eta$. Интегрируя (6) по $\tau$, получим ($a = -c_1$, $a + \alpha = -c_2$)

$$W_{c_2}(x, y, t; \xi, \eta) = W_{c_1}(x, y, t; \xi, \eta) + \int\limits_0^\infty dt' \iint\limits_{-\infty}^{\infty} D_{-c_2}(x, y, t; x', y', t') \times$$

$$\times [c_1(x', y') - c_2(x', y')]\, W_{c_1}(x', y', t'; \xi, \eta)\, dx'\, dy' =$$

$$= W_{c_1}(x, y, t; \xi, \eta) + A_{c_1 c_2}(x, y, t; \xi, \eta); \tag{8}$$

ядро $A_{c_1 c_2}$ является непрерывной функцией от всех переменных, равной нулю при $\rho \geqslant t$. Обозначим через $\vartheta_1(p, q; \lambda)$ и $\vartheta_2(p, q; \lambda)$ спектральные функции задач, о которых идет речь в теореме 1.

Лемма 1. *Если в некоторой точке $p_0$ внутри правой полуплоскости $\vartheta_1(p_0, p_0; \lambda) = \vartheta_2(p_0, p_0; \lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ и $c_1(x, y) \geqslant c_2(x, y)$ в круге $K$, расположенном в этой полуплоскости, с центром в точке $p_0$, радиуса, не превосходящего некоторого $\varepsilon > 0$, одного и того же для всех точек $p_0$ из конечной области $D$, то $c_1(x, y) = c_2(x, y)$ в* $K$.

В самом деле, сдвигая $\lambda$ в (1), можно добиться, что в некоторой области, охватывающей $D$, $-c_1(x, y)$, $-c_2(x, y) \geqslant 1$. При $t_0 > 0$ достаточно малом и $(x_0, y_0) \in D$ теорема 2 и все предыдущие результаты применимы. На основании равенства

$$\int f(p) \overline{g(p)}\, dp = \int_{-\infty}^{\infty} \iint \psi(p, q; \lambda) f(q) \overline{g(p)}\, dq\, dp\, d\rho(\lambda) \quad (f, g \in \mathfrak{H})$$

при помощи (7) получим

$$\iint_{-\infty}^{\infty} W_{c_1}^2(x_0, y_0, t_0; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \iint \psi_1(p, q; \lambda) \left( W_{c_1}(x_0, y_0, t_0; q)\, W_{c_2}(x_0, y_0, t_0; p)\, dq\, dp\, d\rho_1(\lambda) = \right.$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{2}{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda} \frac{t_0}{2} \psi_1(p, p_0; \lambda)\, W_{c_1}(x_0, y_0, t_0; p)\, dp\, d\rho_1(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{\lambda^2} \sin^4 \sqrt{\lambda} \frac{t_0}{2} \psi_1(p_0, p_0; \lambda)\, d\rho_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{\lambda^2} \sin^4 \sqrt{\lambda} \frac{t_0}{2} d_\lambda \vartheta_1(p_0, p_0; \lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{\lambda^2} \sin^4 \sqrt{\lambda} \frac{t_0}{2} d_\lambda \vartheta_2(p_0, p_0; \lambda) = \iint_{-\infty}^{\infty} W_{c_2}^2(x_0, y_0, t_0; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \qquad (9)$$

Вместе с тем из положительности $-c_1$, $-c_2$ и $c_1 \geqslant c_2$ при помощи замечания к теореме 1 вытекает положительность $W_{c_1}$, $W_{c_2}$ и неотрицательность $A_{c_1 c_2}$. В силу (8) может иметь место (9) лишь тогда, когда $A_{c_1 c_2} = 0$, т. е. $c_1(x, y) = c_2(x, y)$ в $K$, что и требовалось. Аналогичное утверждение справедливо и при $p_0$, лежащей на оси $Oy$.

4°. Из леммы 1 и теоремы единственности Гольмгрена (см., например, ([5])) вытекает

Лемма 2. *Пусть в связной конечной области $D$ правой полуплоскости, граница которой состоит из конечного числа аналитических дуг, функции $c_1(x, y)$ и $c_2(x, y)$ аналитичны, причем $c_1(x, y) \geqslant c_2(x, y)$ $((x, y) \in D)$. Если к области $D$ примыкает область $D_0$ правой полуплоскости такая, что в ней $c_1(x, y) = c_2(x, y)$ и $\vartheta_1(p, q; \lambda) = \vartheta_2(p, q; \lambda)$ $(p, q \in D_0; -\infty < \lambda < \infty)$, то и в области $D$ $c_1(x, y) = c_2(x, y)$ и $\vartheta_1(p, q; \lambda) = \vartheta_2(p, q; \lambda)$ $(p, q \in D \cup D_0; -\infty < \lambda < \infty)$.*

Для завершения доказательства теоремы 1 разобьем правую полуплоскость на связные конечные области $D_j$, в каждой из которых $c_1(x, y)$ и $c_2(x, y)$ аналитичны и $c_1(x, y) - c_2(x, y)$ не меняет знака, и применим замечание к лемме 1 к некоторому полукругу $S$ с центром на $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$, лежащему целиком в некоторой $D_j$; тогда $c_1(x, y) = c_2(x, y)$ в $S$. Замечая соотношение $\vartheta_{1x}((0, y), q; \lambda) = \vartheta_{2x}((0, y), q; \lambda) = 0$ и применяя теорему Гольмгрена, убедимся, что $\vartheta_1(p, q; \lambda) = \vartheta_2(p, q; \lambda)$ при $p, q \in S$. Последовательно применяя лемму 2, получим $c_1(x, y) = c_2(x, y)$ при $x \geqslant 0$. Теорема 1 доказана.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
24 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Марченко, Тр. Московск. матем. об-ва, **1** (1952). [2] Ю. М. Березанский, ДАН, **93**, № 1 (1953). [3] А. Я. Повзнер, Матем. сборн., **32** (74), № 1 (1953). [4] M. Riesz, Acta Math., **81**, № 1—2 (1949). [5] А. Д. Мышкис, Усп. матем. наук, **3**, № 2 (24) (1948).