

Н. Н. КРАСОВСКИЙ

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА
В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ**

(Представлено академиком И. Г. Петровским 26 X 1953)

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2). \quad (1)$$

Пусть $X_i(0, 0) = 0$ и характеристическое уравнение системы первого приближения для (1)

$$\left| \| a_{ij} \| - \lambda E \right| = 0, \quad a_{ij} = \left. \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right|_{x_1=0, x_2=0} \quad (2)$$

имеет один нулевой или два чисто мнимых корня. В случае голоморфных правых частей задача устойчивости точки равновесия $x_i = 0$ решена А. М. Ляпуновым ⁽¹⁾ для системы n -го порядка.

Цель настоящей заметки — указать некоторые критерии устойчивости для системы (1). При этом предполагается лишь существование производных $\partial X_i / \partial x_j$ ($i = 1, 2; j = 1, 2$), удовлетворяющих условиям Липшица в некоторой окрестности начала координат.

Теорема. Пусть уравнение (2) имеет один нулевой и один отрицательный корень или пару чисто мнимых корней.

Если в некоторой окрестности начала координат (за исключением самой точки $x_1 = 0, x_2 = 0$) уравнение

$$\left| \left\| \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right\| - \lambda E \right| = 0 \quad (x_1^2 + x_2^2 \neq 0) \quad (3)$$

имеет корни с отрицательными вещественными частями, то решение $x_1 = x_2 = 0$ уравнений (1) асимптотически устойчиво.

Если в каждой точке некоторой окрестности начала координат уравнение (3) имеет корень с положительной действительной частью, то решение $x_1 = x_2 = 0$ неустойчиво.

Доказательство. Неособое линейное преобразование координат x_1, x_2 не меняет величины корней уравнения (3).

Рассмотрим случай одного нулевого корня. Линейным преобразованием приведем систему (1) к виду

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= lz_1 + \psi_1(z_1, z_2), \\ \frac{dz_2}{dt} &= lz_2 + \psi_2(z_1, z_2), \end{aligned} \quad (4)$$

где $l = a_{11} + a_{22} < 0$, производные $\partial\psi_i/\partial z_j$ ($i = 1, 2; j = 1, 2$) стремятся к нулю при $z_1^2 + z_2^2 \rightarrow 0$. Заменим переменные z_1, z_2 по формулам

$$z = z_2, \quad \sigma = lz_1 + \psi_2(z_1, z_2),$$

что возможно, так как при малых z_1, z_2 $\partial\sigma/\partial z_1 < l/2 < 0$.

Система (4) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \varphi(\sigma, z), \\ \frac{dz}{dt} &= \sigma, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varphi(\sigma, z) = \left(l + \frac{\partial\psi_2}{\partial z_1}\right)(\sigma + \varphi_1 - \varphi_2) + \frac{\partial\psi_2}{\partial z_2}\sigma$; $\varphi_1(\sigma, z), \varphi_2(\sigma, z)$ — функции, получающиеся из ψ_1, ψ_2 при замене z_1, z_2 через σ и z . В малой окрестности точки $\sigma = 0, z = 0$ будет выполняться неравенство

$$[\varphi(\sigma, z) - \varphi(0, z)]\sigma < 0 \quad (\sigma \neq 0). \quad (6)$$

Уравнение (3) для системы (4)

$$(1) \quad \begin{vmatrix} l + \frac{\partial\psi_1}{\partial z_1} - \lambda & \frac{\partial\psi_1}{\partial z_2} \\ l + \frac{\partial\psi_2}{\partial z_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial z_2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\sigma^2 + z^2 \neq 0)$$

имеет корни с отрицательными вещественными частями. Поэтому

$$\left(l + \frac{\partial\psi_1}{\partial z_1}\right)\frac{\partial\psi_2}{\partial z_2} - \left(l + \frac{\partial\psi_2}{\partial z_1}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial z_2} > 0$$

или

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = \frac{1}{l + \frac{\partial\psi_2}{\partial z_1}} \left[\left(l + \frac{\partial\psi_2}{\partial z_1}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial z_2} - \left(l + \frac{\partial\psi_1}{\partial z_1}\right)\frac{\partial\psi_2}{\partial z_2} \right] > 0.$$

Из последнего неравенства следует

$$z\varphi(0, z) = z(\varphi_1(0, z) - \varphi_2(0, z)) \left(l + \frac{\partial\psi_2}{\partial z_1}\right) < 0 \quad (z \neq 0). \quad (7)$$

Таким образом, при первом условии теоремы функция

$$2v(\sigma, z) = \sigma^2 - 2 \int_0^z \varphi(0, z) dz$$

будет определенно-положительной.

Вычислим dv/dt в силу (5):

$$\frac{dv}{dt} = [\varphi(\sigma, z) - \varphi(0, z)]\sigma. \quad (8)$$

Вследствие (6) $dv/dt \leq 0$, причем $dv/dt = 0$ лишь при $\sigma = 0$. Так как на кривой $\sigma = 0$ не содержится целиком положительных полутраекторий системы (5) вследствие (7), то выполняются все условия, достаточные для того, чтобы решение $\sigma = z = 0$ было асимптотически устойчивым по Ляпунову (2).

Пусть теперь уравнение (3) имеет положительный корень. В этом случае неравенство (7) изменится на обратное, т. е. вследствие

$\int_0^z \varphi(0, z) dz > 0$ функция $v(\sigma, z)$ будет знакопеременной.

Рассмотрим траекторию $f(p, t)$, начинающуюся в области $v(\sigma, z) < 0$. Если решение $x_1 = x_2 = 0$ устойчиво, $f(p, t)$ имеет ограниченное ω -предельное множество L , которое вследствие $v(0, 0) = 0$ и $dv/dt \leq 0$ не содержит начала координат. Не возрастающая вдоль $f(p, t)$ функция $v(t)$ имеет предел v_0 . Пусть $f(q, t)$ — некоторая траектория из L . Вдоль $f(q, t)$ $v(\sigma, z) = v_0$, т. е. $dv/dt \equiv 0$. Однако это противоречит тому, что в области $dv/dt = 0$, т. е. на кривой $\sigma = 0, z \neq 0$ вследствие (7) не содержится целиком положительных полутраекторий (5). Противоречие и доказывает теорему.

В случае, когда уравнение (2) имеет мнимые корни в малой окрестности $x_1 = 0, x_2 = 0$, траектории системы (1) либо образуют спирали, либо являются замкнутыми кривыми.

Если уравнение (3) имеет корни с отрицательной вещественной частью, то вследствие

$$\oint_{\Gamma} X_1 dx_2 - X_2 dx_1 = \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 < 0 \quad (9)$$

эти траектории должны образовать закручивающиеся спирали. Используя условие (9), нетрудно показать, что начало координат является ω -предельной точкой для всякой траектории системы (1) и не является α -предельной точкой ни для какой траектории этой системы, отличной от $x_1 = x_2 = 0$. Отсюда следует асимптотическая устойчивость решения $x_1 = x_2 = 0$.

Если уравнение имеет корни с положительной вещественной частью, то, как следует из доказанного выше, траектории примыкают к точке $x_1 = 0, x_2 = 0$ при $t \rightarrow -\infty$, что исключает устойчивость решения $x_1 = x_2 = 0$ по Ляпунову (3).

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова

Поступило
16 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, М. — Л., 1950.
² Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский, ДАН, 86, № 3 (1952). ³ Н. П. Еругин, Прикладн. матем. и мех., 16, в. 5 (1950).