Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 6

МАТЕМАТИКА

Ю. Б. ГЕРМЕЙЕР и Д. С. ИРГЕР

О ПРИБЛИЖЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 X 1953)

1. Пусть $p(t)$ и $q(t)$ непрерывные в полуинтервале $a \leqslant t < b$ $(b \leqslant \infty)$ и, вообще говоря, комплексные функции вещественного t. Будем говорить, что $\exp\int_a^t \omega_1(s)\,ds$ и $\exp\int_a^t \omega_2(s)\,ds$ являются приближенными представлениями решений уравнения

$$L[x] = \ddot{x} + 2p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \tag{1}$$

в полуинтервале $[a, b)$, если существуют функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$, непрерывные при $a \leqslant t < b$, обладающие конечными не равными одновременно нулю пределами при $t \to b$ и такие, что

$$x_1(t) = y_1(t)\exp\int_a^t \omega_1(s)\,ds; \quad x_2(t) = y_2(t)\exp\int_a^t \omega_2(s)\,ds \tag{2}$$

удовлетворяют в $[a, b)$ уравнению (1).

Введем следующие обозначения:

$$R[\omega(t)] = \dot{\omega}(t) + \omega^2(t) + 2p(t)\omega(t) + q(t); \quad \rho(t) = \rho[\omega_1(t), \omega_2(t)] =$$

$$= \max_{i=1,2}\left|\frac{R[\omega_i(t)]}{\omega_2(t)-\omega_1(t)}\right|; \; M[\Omega] = \sup_{a\leqslant t_1\leqslant t_2<b} \exp\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}[\Omega(s)]\,ds.$$

Определим $K]\Omega]$, $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(t)$ соотношениями:

$$\begin{aligned}
&K = M[\Omega]; \quad \alpha_1 = a; \quad \alpha_2 = \beta_1 = t; \quad \beta_2 = b, \\
&\qquad \text{когда } M[\Omega] < \infty,\ M[-\Omega] = \infty; \\
&K = M[-\Omega]; \quad \alpha_1 = \beta_2 = t; \quad \alpha_2 = a; \quad \beta_1 = b, \\
&\qquad \text{когда } M[\Omega] = \infty, \quad M[-\Omega] < \infty; \\
&K = \max\{M[\Omega], M[-\Omega]\}; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = t; \quad \beta_1 = \beta_2 = b, \\
&\qquad \text{когда } M[\Omega] < \infty, \quad M[-\Omega] < \infty.
\end{aligned} \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть комплексные* $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ *в полуинтервале* $a \leqslant t < b$ *непрерывно дифференцируемы и* $\Omega(t) = \omega_2(t) - \omega_1(t) \neq 0$. *Если конечны* $\int_a^b \rho(s)\,ds$ *и хотя бы одна из величин* $M[\Omega]$, $M[-\Omega]$, *то функции* $\exp\int_a^t \omega_1 ds$ и $\exp\int_a^t \omega_2 ds$ *являются приближенными пред-*

ставлениями решений уравнения (1) *в* $[a, b)$. *При этом функции* $y_i(t)$ *в* (2) *и их производные могут быть представлены рядами* $y_i(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} y_{in}(t)$, $\dot{y}_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_{in}(t)$, *мажорантами для которых, соответственно, являются*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[(1+K)\int_{\alpha_i(t)}^{\beta_i(t)} \rho\, ds\right]^n = \exp\left[(1+K)\int_{\alpha_i}^{\beta_i} \rho\, ds\right];$$

$$\frac{K\,|\Omega(t)|}{1+K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[(1+K)\int_{\alpha_i(t)}^{\beta_i(t)} \rho\, ds\right]^n = \frac{K\,|\Omega(t)|}{1+K}\left\{\exp\left[(1+K)\int_{\alpha_i}^{\beta_i} \rho\, ds\right] - 1\right\}.$$

Линейная независимость решений (2) и отличие от нуля обеих $\lim_{t\to b} y_i(t)$ могут быть гарантированы, например, при $\int_a^b \rho(s)\, ds < \frac{\ln 2}{1+K}$.

2. Теорема 1 может быть использована, в частности, для асимптотического представления решений уравнения (1) при $t \to b$, а также при $\alpha \to \infty$ в случае, когда коэффициенты $p(t)$ и $q(t)$ зависят от комплексного параметра α. Дадим некоторые примеры.

а) Принимая $\omega_{1,2} = -p(t) \pm \sqrt{p^2(t) - q(t)}$, можно получить асимптотическое представление при $t \to b$ интегралов уравнения (1), являющееся обобщением результата И. М. Соболя ([1]) на случай комплексных $p(t)$ и $q(t)$, а также уточнением результата Левинсона ([2]) применительно к уравнениям второго порядка.

б) Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \{[\alpha p(t) + p_1(t)]^2 + \alpha R(t, \alpha)\}\, x = 0, \tag{4}$$

где $\ddot{p}(t)$, $\dot{p}_1(t)$ и $R(t, \alpha)$ непрерывны по t при $a \leqslant t < b \leqslant \infty$ для всех значений параметра α, принадлежащих некоторому множеству D комплексной плоскости. Пусть, кроме того, $\alpha p(t) + p_1(t) \neq 0$ в $[a, b)$, а интегралы $\int_a^b |p_1(s)|\, ds$, $\int_a^b \left\{\left|\left(\frac{\dot{p}}{2p}\right)^2 - \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{p}}{2p}\right)\right| + \left|p\,\frac{d}{dt}\left(\frac{p_1}{p}\right)\right|\right\} \frac{ds}{|\alpha p + p_1|} = J_1(\alpha)$ и $\int_a^b \left|\frac{\alpha R(s, \alpha)}{\alpha p(s) + p_1(s)}\right| ds = J_2(\alpha)$ конечны для каждого $\alpha \in D$. Полагая $\omega_{1,2} = -\frac{\dot{p}(t)}{2p(t)} \pm i\,[\alpha p(t) + p_1(t)]$ и используя теорему 1, получим:

Теорема 2. *Если* $\mathrm{Im}\,[\alpha p(t)]$ *сохраняет знак при* $a \leqslant t < b$ *и* $\alpha \in D$, *то два интеграла уравнения* (4) *можно представить в виде:*

$$x_{1,2} = y_{1,2}(t, \alpha)\sqrt{\frac{p(a)}{p(t)}}\exp\left[\pm i\int_a^t (\alpha p + p_1)\, ds\right],$$

где при каждом $\alpha \in D$ *и* $a \leqslant t < b$

$$|y_i(t, \alpha) - 1| \leqslant \exp\{K[J_1(\alpha) + J_2(\alpha)]\} - 1;$$

$$\left|\frac{dy_i(t, \alpha)}{dt}\right| \leqslant (K-1)\,|\alpha p(t) + p_1(t)|\,\{\exp[K(J_1 + J_2)] - 1\}.$$

Здесь $K = 1 + \exp\left[2\int_a^b |p_1(s)|\, ds\right]$.

Теорема 2 дает асимптотическое представление решений (4) при больших значениях параметра, когда $\alpha \to \infty$ и при этом $J_1(\alpha) + J_2(\alpha) \to 0$. Тем самым эта теорема обобщает результат В. С. Пугачева ([3], [4]) на случай наличия особенностей у коэффициентов уравнения при $t = b$ и на случай бесконечного интервала; полученные здесь оценки более обозримы и точны, чем в ([4]).

3. Зачастую решения уравнения (1) удобно оценивать, сравнивая их с известными решениями $c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$ близкого (в каком-то смысле) „эталонного" уравнения

$$\ddot{z} + 2P(t)\dot{z} + Q(t) z = 0 \tag{5}$$

с непрерывными на $[a, b)$ коэффициентами. Для этой цели также можно использовать теорему 1, полагая $\omega_i = \dot{z}_i(t)/z_i(t)$ $(i = 1, 2)$. Тогда в $[a, b)$ $\omega_i(t)$ непрерывно дифференцируемы, $\Omega(t) = \omega_2(t) - \omega_1(t) \neq 0$ (если только $z_i(t) \neq 0$ и линейно независимы), а $M[\Omega]$, $M[-\Omega]$ и $\rho(t)$ запишутся в виде

$$M[\Omega] = \sup_{a \leqslant t_1 \leqslant t_2 < b} \left| \frac{z_1(t_1) z_2(t_2)}{z_1(t_2) z_2(t_1)} \right|; \quad M[-\Omega] = \sup_{a \leqslant t_1 \leqslant t_2 < b} \left| \frac{z_1(t_2) z_2(t_1)}{z_1(t_1) z_2(t_2)} \right|;$$

$$\rho(t) = \max_{\substack{i,\, j = 1,\, 2 \\ i \neq j}} \left| \frac{z_i(t) L[z_j(t)]}{\dot{z}_1(t) z_2(t) - z_1(t) \dot{z}_2(t)} \right| =$$

$$= \exp\left\{2 \int_a^t \operatorname{Re}[P(s)\, ds]\right\} \max_{\substack{i,\, j = 1,\, 2 \\ i \neq j}} \left| \frac{z_i \{2[p(t) - P(t)] \dot{z}_j + [q(t) - Q(t)] z_j\}}{\dot{z}_1(a) z_2(a) - z_1(a) \dot{z}_2(a)} \right|.$$

В частности, для вещественных $P(t)$ и $Q(t)$ в качестве $z_1(t)$ и $z_2(t)$ можно принять фундаментальную систему комплексно-сопряженных решений (5). Тогда $M[\Omega] = M[-\Omega] = 1$, и требования теоремы 1 сводятся к конечности $\int_a^b \rho(s)\, ds$.

Дадим примеры применения теоремы 1 в форме, связанной с „эталонным" уравнением.

в) Используя уравнение с постоянными коэффициентами P и Q: $P = \varlimsup_{t \to \infty} \frac{1}{t-a} \int_a^t p(s)\, ds$, $Q = \varlimsup_{t \to \infty} \frac{1}{t-a} \int_a^t q(s)\, ds$ в предположении $P^2 \neq Q$ и конечности $\int_a^\infty |p(s) - P|\, ds$ и $\int_a^\infty |q(s) - Q|\, ds$, получим ([5], [2]) известное асимптотическое представление $x_{1,\,2} \sim \exp\{(t-a)[-P \pm \sqrt{P^2 - Q}]\}$ и оценку точности его.

г) Если $P^2 = Q$, то, принимая $z_1 = \exp[-P(t-a)]$, $z_2 = (t + 1 - a) \times \exp[-P(t-a)]$, используя теорему 1 и, кроме того, теорему Лиувилля, получим:

Уравнение (1) *обладает двумя интегралами вида*

$$x_1 = \exp[-P(t-a)]\left\{1 + O\left[\int_t^\infty \rho(s)\, ds\right]\right\};$$

$$x_2 = \exp[-P(t-a)]\left\{t + O\left[\int_a^t \int_s^\infty \rho(\tau)\, d\tau\, ds\right]\right\},$$

если только $\int\limits_a^\infty \rho(s)\,ds < \infty$, *где*

$$\rho(t) = t\,|\,2P\,[p(t) - P] + [Q - q(t)]\,| + 2\,|\,p(t) - P\,|.$$

Частный случай этого утверждения при вещественных $p(t)$, $q(t)$ и $P = Q = 0$ совпадает (для уравнений второго порядка) с данным И. М. Соболем ([6]) обобщением теоремы Шпета. Интересно отметить, что произведя в уравнении

$$\ddot{x} + q(t)\,x = 0 \tag{6}$$

замену $x = y\exp\left[\int\limits_a^t\int\limits_s^\infty q(\tau)\,d\tau\,ds\right]$ и применяя только что указанный результат, получим следующее обобщение теоремы Шпета:

Теорема 3. *Если* $q(t)$ *суммируема на* $[a, \infty)$ *и*

$$\int\limits_a^\infty \left|\int\limits_s^\infty q(\tau)\,d\tau\right| ds < \infty, \quad \int\limits_a^\infty s\left|\int\limits_s^\infty q(\tau)\,d\tau\right|^2 ds < \infty,$$

то (6) *обладает двумя непрерывно дифференцируемыми в* $[a, \infty)$ *решениями*

$$x_1 = 1 + O\left[\int\limits_t^\infty \left\{s\left|\int\limits_s^\infty q(\tau)\,d\tau\right|^2 + 2\left|\int\limits_s^\infty q(\tau)\,d\tau\right|\right\} ds\right];$$

$$x_2 = t + O\left[\int\limits_a^t\int\limits_\sigma^\infty \left\{s\left|\int\limits_s^\infty q(\tau)\,d\tau\right|^2 + 2\left|\int\limits_s^\infty q(\tau)\,d\tau\right|\right\} ds\,d\sigma\right].$$

Если выполнены условия И. М. Соболя, то выполнены и условия теоремы 3. Обратное неверно, как показывает пример $q = \sin t^3$.

д) Произведя в (6) с вещественным $q(t) = \alpha^2 t^m r(t) + r_1(t)$ $(r(t) > 0$ при $0 \leqslant t < \infty)$ замену переменных $s = \left\{\alpha\,\frac{m+2}{2}\int\limits_0^t \tau^{\frac{m}{2}}\sqrt{r(\tau)}\,d\tau\right\}^{\frac{2}{m+2}} = \omega(t)$, $y = x\sqrt{\dot{\omega}(t)}$, придем к уравнению

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \left\{s^m + \frac{1}{\dot{\omega}^2}\left[r_1 - \frac{2\dot{\omega}\,\dddot{\omega} - 3\ddot{\omega}^2}{4\dot{\omega}^2}\right]\right\} y = 0.$$

Принимая за „эталонное“ уравнение $d^2z/ds^2 + s^m z = 0$, используя теорему 1 и возвращаясь затем к переменным t и x, получим результат А. А. Дородницына ([7]). Оценка точности при больших α, равно как и возможность такого приближенного представления, определяются в силу теоремы 1 величиной

$$\int\limits_0^{\omega(b)} \rho(s)\,ds = \int\limits_0^b \left|\frac{z_1[\omega(t)]\,z_2[\omega(t)]}{\dot{\omega}(t)\,\{z_1(0)\,\dot{z}_2(0) - \dot{z}_1(0)\,z_2(0)\}}\left[r_1(t) - \frac{2\dot{\omega}\dddot{\omega} - 3\ddot{\omega}^2}{4\dot{\omega}^2}\right]\right| dt,$$

где $z_1(s)$ и $z_2(s)$ — фундаментальная система комплексно-сопряженных решений „эталонного“ уравнения.

Поступило
21 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Соболь, Усп. матем. наук, 6, в. 2 (1951). [2] N. Levinson, Duke Math. J., 15, 111 (1948). [3] В. С. Пугачев, Изв. АН СССР, сер. матем., 5, № 1 (1941). [4] В. С. Пугачев, Прикладн. матем. и мех., 6, 203 (1942). [5] G. Fubini, Atti Accad. Lincei, 6, 26 (1937). [6] И. М. Соболь, ДАН, 61, № 2 (1948). [7] А. А. Дородницын, Усп. матем. наук, 7, в. 6 (1952).