Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 6

МАТЕМАТИКА

Р. М. ГЕЙДЕЛЬМАН

РАССЛОЕНИЕ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ ПРЯМЫХ В МНОГОМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 26 X 1953)

1. Проблема расслоения пары конгруенций прямых в трехмерном пространстве была поставлена Фубини около 30 лет назад [1]. Этой проблеме посвящено много исследований в проективной и метрической дифференциальной геометрии*. В настоящей работе рассмотрена проблема расслоения двупараметрических семейств прямых в n-мерном проективном пространстве P_n.

Пусть в n-мерном проективном пространстве даны два двупараметрических семейства прямых (l_1) и (l_2), элементы которых l_1 и l_2 находятся во взаимно-однозначном соответствии.

Если к семейству прямых (l_1) можно присоединить однопараметрическое семейство поверхностей (Σ) так, что касательные плоскости к ним в точках пересечения с прямой l_1 проходят через соответствующую прямую l_2, то будем говорить, что семейство прямых (l_1) расслаивает семейство (l_2). Если при этом и семейство (l_2) расслаивает семейство (l_1), то эта пара семейств образует вполне расслояемую пару.

Пусть прямая l_1 определяется точками A_0 и A_1, а соответствующий луч l_2 — точками A_2 и A_3. Пусть точки $A_4, A_5, \ldots, A_n$, вместе с точками A_0, A_1, A_2, A_3 образуют репер P_n. Уравнения инфинитезимального перемещения элементов репера A_α будут иметь вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Уравнения структуры имеют обычный вид

$$D\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta] \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

(по γ — суммирование).

Пусть P — точка пересечения расслояющей поверхности Σ с лучом A_0A_1, $P = A_1 + kA_0$,

$$dP = A_0(\omega_1^0 + dk + k\omega_0^0) + A_1(\omega_1^1 + k\omega^1) + A_2(\omega_1^2 + k\omega^2) + A_3(\omega_1^3 + k\omega^3) + \\ + A_4(\omega_1^4 + k\omega^4) + \ldots + A_n(\omega_1^n + k\omega^n). \tag{3}$$

Семейство прямых (A_0A_1) будет расслаивать семейство (A_2A_3), если dP определяется только точками P, A_2, A_3, что будет, если

$$dk + \omega_1^0 + k(\omega_0^0 - \omega_1^1) - k^2\omega^1 = 0; \tag{4}$$

$$\omega^i = \omega_1^i = 0 \quad (i = 4, 5, \ldots, n). \tag{5}$$

* Литературные указания по проблеме расслоения см. [4], стр. 259.

Чтобы уравнение (4) определяло однопараметрическое семейство поверхностей (Σ), нужно, чтобы его внешний дифференциал был алгебраическим следствием самого уравнения [2]. Отсюда имеем

$$[\omega^2\omega_2^1]+[\omega^3\omega_3^1]=0;$$

$$[\omega^2\,\omega_2^0]+[\omega^3\,\omega_3^0]+[\omega_3^1\,\omega_1^3]+[\omega_2^1\,\omega_1^2]=0;\quad [\omega_1^2\,\omega_2^0]+[\omega_1^3\,\omega_3^0]=0. \tag{6}$$

Из уравнений (5) видно, что дифференциальная окрестность луча A_0A_1 трехмерная и, следовательно, семейство (A_0A_1) — конгруенция [3].

Если двупараметрическое семейство прямых (A_0A_1) расслаивает двумерное многообразие прямых (A_2A_3), то семейство (A_0A_1) — конгруенция.

Если при этом и семейство (A_2A_3) расслаивает семейство (A_0A_1), то аналогично получим:

$$\omega_2^i=\omega_3^i=0,\quad i=4,5,\ldots,n.$$

Итак, для вполне расслояемой пары имеем:

$$\omega^i=\omega_1^i=\omega_2^i=\omega_3^i=0,\qquad i=4,5,\ldots,n.$$

Отсюда видно, что если два двупараметрических семейства прямых образуют в P_n вполне расслояемую пару, то они представляют две конгруенции трехмерного пространства, погруженного в P_n.

В дальнейшем будем рассматривать пары двупараметрических семейств прямых, расслояемые в одном направлении.

2. Пусть не параболическая конгруенция прямых (l_1) расслаивает семейство прямых (l_2). Поместим точки A_0 и A_1 в фокусы луча l_1. Фокальные плоскости луча A_0A_1 лежат в трехмерном пространстве, определенном точками A_0A_1 и прямой l_2, следовательно, пересекают соответствующий луч l_2. Поместим точку A_2 репера в точку пересечения фокальной плоскости фокуса A_0 с прямой l_2, а точку A_3 — в пересечении фокальной плоскости фокуса A_1 с l_2.

Из

$$dA_0=\omega_0^0\,A_0+\omega^1\,A_1+\omega^2A_2+\omega^3A_3,\quad dA_1=\omega_1^0\,A_0+\omega_1^1\,A_1+\omega_1^2\,A_2+\omega_1^3A_3$$

видно, что при этом отнесении $\omega_1^2=0$ и $\omega^3=0$.

Итак, расслояющее семейство (A_0A_1) определяется уравнениями:

$$\omega^3=0;\quad \omega_1^2=0;\quad \omega^i=0;\quad \omega_1^i=0\ \ (i=4,5,\ldots,n). \tag{7}$$

Их внешние дифференциалы имеют вид:

$$[\omega_1^0\,\omega^2]+[\omega_1^3\,\omega_3^2]=0;\quad [\omega^1\,\omega_1^3]+[\omega^2\,\omega_2^3]=0;\quad [\omega^2\,\omega_2^i]=0;\quad [\omega^3\,\omega_3^i]=0. \tag{7'}$$

Разрешая алгебраически систему (7′), получим:

$$\begin{gathered}\omega_1^0=\alpha\omega^2+\beta\omega_1^3;\quad \omega_3^2=-\beta\omega^2+\gamma\omega_1^3;\quad \omega^1=\lambda\omega_1^3+\mu\omega^2;\\ \omega_2^3=-\mu\omega_1^3+\nu\omega^2;\quad \omega_2^i=B_i\,\omega^2;\quad \omega_3^i=C_i\,\omega_1^3\end{gathered} \tag{7''}$$

(формы ω^2 и ω_1^3 линейно независимы, так как в противном случае конгруенция (A_0A_1) вырождается). Число неизвестных форм $q=2n-2$; $s_1=2n-4$; $s_2=q-s_1=2$; $Q=s_1+2s_2=2n$. Число параметров наиболее общего интегрального элемента $N=2n$.

Уравнения (7) в инволюции [2] и определяют произвольную конгруенцию с широтой двух функций двух аргументов.

Уравнения развертывающихся поверхностей конгруенции (A_0A_1)

$$\omega^2=0,\quad \omega_1^3=0.$$

При заданной конгруенции (7), (7′) расслояемое семейство прямых (A_2A_3) определяется уравнениями расслоения (6)

$$[\omega_2^1\,\omega^2]=0;\quad [\omega_3^0\,\omega_1^3]=0;\quad [\omega^2\,\omega_2^0]+[\omega_3^1\,\omega_1^3]=0, \tag{8}$$

откуда следует:

$$\omega_2^1=L\omega^2;\quad \omega_3^0=R\omega_1^3;\quad \omega_2^0=M\omega^2+N\omega_1^3;\quad \omega_3^1=-N\omega^2+P\omega_1^3. \tag{9}$$

Система уравнений (8) в инволюции и определяет семейство (A_2A_3) с произволом одной функции двух аргументов.

Если расслояемое семейство прямых (A_2A_3) — конгруенция, то на прямой A_2A_3 имеется точка $F=A_3+\rho A_2$ — фокус, такая, что при смещении в развертывающейся поверхности dF находится на прямой A_2A_3. Это будет, если компоненты dF по $A_0, A_1, A_4, \ldots, A_n$ равны нулю [3],

$$dF=A_0(\omega_3^0+\rho\omega_2^0)+A_1(\omega_3^1+\rho\omega_2^1)+A_2(\omega_3^2+d\rho+\rho\omega_2^2)+A_3(\omega_3^3+\rho\omega_2^3)+$$
$$+A_4(\omega_3^4+\rho\omega_2^4)+\ldots+A_n(\omega_3^n+\rho\omega_2^n).$$

Отсюда

$$\omega_3^0+\rho\omega_2^0=0;\quad \omega_3^1+\rho\omega_2^1=0;\quad \omega_3^i+\rho\omega_2^i=0\quad (i=4,\ldots,n). \tag{10}$$

Уравнения (10) непротиворечивы, если $N=0$. В этом случае уравнения развертывающихся поверхностей будут $\omega_1^3=0$ и $\omega^2=0$ и координаты фокусов луча A_2A_3 $\rho_1=0$; $1/\rho_2=0$, т. е. фокусами будут точки A_3 и A_2.

Теорема. *Если конгруенция прямых (A_0A_1) расслаивает конгруенцию (A_2A_3), то развертывающиеся поверхности у них соответствуют, а фокусы лучей расслояемой конгруенции лежат в соответствующих фокальных плоскостях расслояющей конгруенции.*

Расслояемые конгруенции (A_2A_3) определяются уравнениями:

$$\omega_2^1=L\omega^2;\quad \omega_3^0=R\omega_1^3;\quad \omega_2^0=M\omega^2;\quad \omega_3^1=P\omega_1^3. \tag{11}$$

Система (11) в инволюции и определяет расслояемые конгруенции с произволом 4 функций одного аргумента.

Теорема. *Расслояющие поверхности расслояемой пары конгруенций обладают сопряженной сетью, высекаемой развертывающимися поверхностями расслояющей конгруенции.*

Эта теорема является обобщением теоремы Фубини о сопряженных парах в P_3 [4] на одностороннее расслоение в P_n и показывает, что расслояющая конгруенция (A_0A_1) будет сопряжена всем расслояющим поверхностям, а расслояемая конгруенция (A_2A_3) будет им гармонична [3].

3. Рассмотрим теперь случай, когда расслаивающая конгруенция параболическая.

Поместим точку A_1 в единственный фокус прямой l_1, точку A_0 возьмем на луче l_1 произвольно. Точку A_3 репера возьмем в пересечении фокальной плоскости прямой l_1 с соответствующей прямой l_2, точку A_2 возьмем на луче l_2 произвольно. Так как $dA_1=\omega_1^0A_0+$ $+\omega_1^1A_1+\omega_1^2A_2+\omega_1^3A_3$, а фокальная плоскость фокуса A_1 определяется точками A_0, A_1 и A_3, то $\omega_1^2=0$.

Для невырожденной параболической конгруенции формы ω^2 и ω^3 линейно независимы и $[\omega_1^3\,\omega^2]=0$.

Итак, при указанной системе отнесения расслояющая параболическая конгруенция определяется системой:

$$\omega_1^2=0;\quad \omega_1^3=K\omega^2;\quad \omega^i=0;\quad \omega_1^i=0\quad (i=4,5,\ldots,n). \tag{12}$$

Уравнения (12) определяют произвольную параболическую конгруенцию. Уравнения семейства ее развертывающихся поверхностей $\omega^2 = 0$. Широта решения — одна функция двух аргументов.

Расслояемое семейство (A_2A_3) определяется системой, полученной из уравнений расслоения (6):

$$\omega_3^0 = R\omega^2; \quad \omega_2^1 = L\omega^2 + M\omega^3; \quad \omega_3^1 = M\omega^2 + N\omega^3; \quad \omega_2^0 = S\omega^2 + (R + NK)\,\omega^3. \tag{13}$$

Система (13) в инволюции и определяет расслояемое семейство (A_2A_3) с произволом одной функции двух аргументов.

Семейство (A_2A_3) будет конгруенцией, если $N = 0$. Тогда:

$$\omega_3^0 = R\omega^2; \quad \omega_2^1 = L\omega^2 + M\omega^3; \quad \omega_3^1 = M\omega^2; \quad \omega_2^0 = S\omega^2 + R\omega^3. \tag{14}$$

Уравнения (14) определяют также параболическую конгруенцию с произволом 4 функций одного аргумента. Фокус ее луча A_2A_3 будет в точке A_3, а уравнение единственного семейства развертывающихся поверхностей $\omega^2 = 0$.

Теорема. *Если параболическая конгруенция (A_0A_1) расслаивает конгруенцию (A_2A_3), то последняя — тоже параболическая, фокус ее луча лежит в соответствующей фокальной плоскости расслояющей конгруенции, и развертывающиеся поверхности обеих конгруенций соответствуют.*

Фокальные поверхности (A_1) и (A_3) обеих конгруенций обладают семейством асимптотических линий $\omega^2 = 0$, касательные к которым и образуют параболическую конгруенцию.

Теорема. *Расслояющие поверхности расслояемой пары параболических конгруенций обладают семейством асимптотических линий, соответствующих развертывающимся поверхностям обеих конгруенций.*

4. Если в уравнениях (12) $K = 0$, то конгруенция (A_0A_1) представляет ∞^2 прямых, проходящих через точку A_1, т. е. трехмерный конус.

Расслояемая пара семейств (A_0A_1) и (A_2A_3) определяется системой уравнений:

$$\omega_2^1 = L\omega^2 + M\omega^3; \quad \omega_3^1 = M\omega^2 + N\omega^3; \quad \omega_2^0 = P\omega^2 + Q\omega^3; \quad \omega_3^0 = Q\omega^2 + R\omega^3;$$
$$\omega_2^i = B_i\,\omega^2 + C_i\,\omega^3; \quad \omega_3^i = C_i\,\omega^2 + D_i\omega^3. \tag{15}$$

Дифференцируя внешним образом эти уравнения, получим, что произвол существования расслояемой пары семейств (A_0A_1) и (A_2A_3) в этом случае $n - 1$ функция двух аргументов.

Если при этом семейство (A_2A_3) — конгруенция, то, поместив точки A_2 и A_3 в фокусы луча, получим $M = Q = 0$ и $C_i = 0$, $i = 4, 5, \ldots, n$. Тогда расслояемая пара семейств (A_0A_1) и (A_2A_3) определяется системой:

$$\omega_2^1 = L\omega^2; \quad \omega_3^1 = N\omega^3; \quad \omega_2^0 = P\omega^2; \quad \omega_3^0 = R\omega^3; \quad \omega_2^i = B_i\,\omega^2; \quad \omega_3^i = D_i\,\omega^3. \tag{16}$$

При этом конгруенция (A_2A_3) произвольна и уравнения ее развертывающихся поверхностей $\omega^2 = 0$ и $\omega^3 = 0$.

Итак, произвольная конгруенция (A_2A_3) расслояется трехмерным конусом.

В этом случае расслояющие поверхности также несут сопряженную сеть $\omega^2 = 0$ и $\omega^3 = 0$, соответствующую развертывающимся поверхностям расслояемой конгруенции (A_2A_3).

Поступило
7 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Fubini, Ann. di Math., (4) 1 (1924). [2] С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, 1948. [3] С. П. Фиников, Теория конгруенций, 1950. [4] С. П. Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, 1937.