Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 6

МАТЕМАТИКА

М. Ш. БИРМАН

О МИНИМАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 22 X 1953)

Как известно, обширный класс граничных задач для дифференциальных уравнений эллиптического типа связан с нахождением минимума некоторых квадратичных функционалов. В настоящей заметке вопрос о построении соответствующих минимальных функционалов рассматривается на основе теории расширений положительно-определенных операторов ([1]) и теории общих граничных задач для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка ([2]). При этом удается получить некоторые новые формы вариационных приемов, которые в комбинации с известными классическими методами позволяют находить двусторонние приближения к искомому минимуму. Ниже используются понятия и обозначения предыдущих заметок автора ([3,4]).

Пусть $\tilde{S}$ — какое-либо положительно-определенное расширение оператора S. Хорошо известно (см., например, ([5,6])), что решение g_0 уравнения $\tilde{S}g = h$ обращает в минимум функционал

$$F(g) = \tilde{S}[g, g] - 2\,\mathrm{Re}(g, h)$$

по сравнению со всеми функциями $g \in D[\tilde{S}]$. При этом минимизирующая последовательность сходится к g_0 в $D[\tilde{S}]$, т. е.

$$\tilde{S}[g - g_0,\ g - g_0] \to 0,$$

а минимальное значение $F(g_0) = -\tilde{S}[g_0, g_0]$.

В том случае, когда известна полная система решений уравнения $S_g^* = h$, можно указать другой вариационный прием, являющийся обобщением известного метода Треффтца*. Пусть оператор $\tilde{S}$ характеризуется оператором B ([3]) и соответствующие граничные условия ([4]) имеют вид: $P_{W_1}\gamma_1 g = 0$ (главное условие) и $\tilde{M}\gamma_1 g = P_{V_2}\gamma_2 g$ (естественное условие). Оператор $M = B^{-1}$ в этом случае положительно-определенный.

Пусть L — положительно-определенный самосопряженный в V оператор такой, что $D(L) \supseteq D(M)$ и оператор $M - L$ также самосопряженный и положительно-определенный. Очевидно, на V оператор L имеет ограниченный обратный L^{-1}, который мы распространим на все U, полагая его в W нулем. Построим некоторое положительно-

* Метод Треффтца предложен им применительно к задаче Дирихле для уравнения Лапласа. Сходимость метода в этом случае доказана С. Г. Михлиным ([7]).

определенное расширение S_1 оператора S с чисто естественным граничным условием $\tilde{K}_1\gamma_1 g=\gamma_2 g$. Здесь $\tilde{K}_1=\gamma_2 S_\mu^{-1} B_1^{-1}\gamma_1^{-1}$, а оператор B_1 характеризует расширение $\tilde{S}_1$. Выберем оператор B_1 таким образом, чтобы квадратичная форма оператора $K_1=B_1^{-1}$ совпадала на V с квадратичной формой оператора $M-L$. Рассмотрим квадратичный функционал

$$H[g,g]=\tilde{S}_1[g,g]+\int\limits_\Gamma [\tilde{L}^{-1}(\tilde{K}_1\gamma_1 g-\gamma_2 g)]\,\overline{(\tilde{K}_1\gamma_1 g-\gamma_2 g)}\,d\Gamma.$$

Здесь $\tilde{L}=\gamma_2 S_\mu^{-1} L\gamma_1^{-1}$. Функционал $H[g,g]$ обладает следующими свойствами:

1. $H[g,g]=(\tilde{S}_1 g,g)$, если $g\in D(\tilde{S}_1)$, и $H[g,g]=(\tilde{S}g,g)$, если $g\in D(\tilde{S})$.

2. Если $u\in U$, $\gamma_1 u\in D(\tilde{K})$ и $g\in D(\tilde{S})$, то для соответствующего билинейного функционала $H[g,f]$ имеет место соотношение $H[g,u]=0$. Отметим, что доказательство второго из этих свойств опирается на следующее обобщение формулы Грина:

$$\tilde{S}_1[g,f]=(S^*g,f)+\int\limits_\Gamma(\tilde{K}\gamma_1 g-\gamma_2 g)\,\overline{\gamma_1 f}\,d\Gamma,$$

если $g\in D(S^*)$, $\gamma_1 g\in D(\tilde{K})$ и $f\in D[\tilde{S}_1]$.

На перечисленных свойствах функционала $H[g,g]$ основывается

Теорема 1. *Решение g_0 уравнения $\tilde{S}g=h$ сообщает минимум функционалу*

$$\Phi(g)=H[g,g]$$

по сравнению со всеми решениями уравнения $S^*g=h$, удовлетворяющими условию $\gamma_1 g\in D(\tilde{K})$. Для минимизирующей последовательности $\Phi(g-g_0)\to 0$ и, тем более, $\tilde{S}_1[g-g_0,g-g_0]\to 0$.

Отметим, что $\Phi(g_0)=\tilde{S}[g_0,g_0]=-F(g_0)$. Это позволяет оценить величину $F(g_0)$ снизу, так как $F(g_0)\geqslant-\Phi(g)$.

Примеры. Для первой краевой задачи, соответствующей жесткому расширению оператора S, $H[g,g]=\tilde{S}_1[g,g]$. В частности можно положить

$$H[g,g]=\int\limits_\Omega\Big(\sum_{i,k=1}^n a_{ik}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial\bar{g}}{\partial x_k}+cg\bar{g}\Big)d\Omega+\omega\int\limits_\Gamma|g|^2 d\Gamma\quad(\omega\geqslant 0).$$

Если выбрать число ω равным нулю, получим метод Треффтца в его известной форме. Пусть $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$, ν — направление внешней нормали и σ — положительная непрерывная на Γ_2 функция. Для задачи с граничными условиями $g\big|_{\Gamma_1}=0$ и $\frac{\partial g}{\partial\nu}+\sigma g\big|_{\Gamma_2}=0$ в качестве $H[g,g]$ можно выбрать функционал

$$H[g,g]=\int\limits_\Omega\Big(\sum_{i,k=1}^n a_{ik}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial\bar{g}}{\partial x_k}+cg\bar{g}\Big)d\Omega+\int\limits_{\Gamma_2}\frac{1}{\sigma}\left|\frac{\partial g}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma.$$

Наконец, для задачи Неймана

$$H[g,g]=\int\limits_\Omega\Big(\sum_{i,k=1}^n a_{ik}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial\bar{g}}{\partial x_k}+cg\bar{g}\Big)d\Omega-\alpha\int\limits_\Gamma|g|^2 d\Gamma+\frac{1}{\alpha}\int\limits_\Gamma\left|\frac{\partial g}{\partial\nu}-\alpha g\right|^2 d\Gamma$$

при достаточно малом значении положительного числа α.

Несколько иначе строятся минимальные функционалы в случае решения однородного дифференциального уравнения при неоднородных граничных условиях. Такую задачу в общем виде можно формулировать следующим образом. Среди функций, удовлетворяющих граничным условиям

$$P_{W_1}\gamma_1 g = \varphi_1, \tag{1}$$

$$\widetilde{M} P_{V_1}\gamma_1 g - P_{V_2}\gamma_2 g = \varphi_2, \tag{2}$$

найти ту, которая удовлетворяет уравнению $S^* g = 0$. Величины φ_1 и φ_2 предполагаются известными. При этом $\varphi_1 \in W_1 \subset H_1$, $\varphi_2 \in V_2 \subset H_2$*. Граничное условие (1) мы будем называть главным, а условие (2) — естественным**.

Пусть $\widetilde{S}_2$ — положительно-определенное расширение с чисто естественным граничным условием $\widetilde{K}_2\gamma_1 g = \gamma_2 g$, выбранное так, что квадратичная форма оператора $K_2 = B_2^{-1}$ совпадает на V с квадратичной формой оператора M. Обозначим $\varphi_2^* = P_{V_2}\widetilde{K}_2\varphi_1 + \varphi_2$.

Теорема 2. *Среди всех функций $g \in D[\widetilde{S}_2]$, удовлетворяющих граничному условию* (1), *наименьшее значение функционалу*

$$\Psi(g) = \widetilde{S}_2[g, g] - 2\mathrm{Re}\int_\Gamma P_{V_1}\gamma_1 g\,\overline{\varphi_2^*}\,d\Gamma$$

сообщает решение уравнения $S^* g = 0$, удовлетворяющее условию (2). *Минимизирующая последовательность сходится к решению в $D[\widetilde{S}_2]$.*

Пусть функционал $H[g, g]$ — тот же, что в теореме 1.

Теорема 3. *Среди всех функций, удовлетворяющих граничным условиям* (1) *и* (2) *и условию гладкости $\gamma_1 g \in D(\widetilde{K}_1)$, наименьшее значение функционалу*

$$\Phi_1(g) = H[g, g]$$

сообщает решение уравнения $S^* g = 0$. Минимизирующая последовательность сходится в метрике квадратичной формы $H[g, g]$.

Теорема 4. *Среди всех функций $u \in U$, удовлетворяющих условию $\gamma_1 u \in D(\widetilde{K}_1)$, наименьшее значение функционалу*

$$\Phi_2(u) = H[u, u] - 2\mathrm{Re}\int_\Gamma \widetilde{K}_1\gamma_1 u\overline{\varphi}_1\,d\Gamma - 2\mathrm{Re}\int_\Gamma \widetilde{L}^{-1}\widetilde{K}_1\gamma_1 u\,\overline{\varphi_2'}\,d\Gamma$$

сообщает функция, удовлетворяющая условиям (1), (2).

Здесь $\varphi_2' = \varphi_2 + P_{V_2}\widetilde{K}_1\varphi_1$. Минимизирующая последовательность сходится к решению в метрике квадратичной формы $H[g, g]$.

Отметим, что на функциях, удовлетворяющих условиям (1) и (2), $\Psi(g)$ отличается от $\Phi_1(g)$ лишь на известную постоянную и, кроме того, для искомого решения u_0

$$\Phi_1(u_0) = -\Phi_2(u_0).$$

---

* В некоторых задачах можно считать φ_2 принадлежащим более широкому классу функций, чем H_2 (см., например, решение задачи Неймана в книге С. Л. Соболева ([8])).

Однако производимое при этом расширение оператора $\widetilde{M}$ выполняется обычно именно вариационными методами. При построении соответствующих функционалов мы можем поэтому считать $\varphi_2 \in H_2$.

** Подобное разбиение граничного условия на главное и естественное произведено (для случая однородных условий) в ([4]).

Это позволяет получить двусторонние приближения для величины $\Psi(u_0)$.

Отметим еще, что для первой краевой задачи можно выбрать $\tilde{S}_1 = \tilde{S}_2$, и тогда:

$$\Psi(g) = \Phi_1(g) = \tilde{S}_1[g, g] = \tilde{S}_2[g, g].$$

Пример. Для задачи с граничным условием $\frac{\partial g}{\partial \nu} + \sigma g \Big|_\Gamma = \varphi_2$ $(\sigma > 0)$

$$\Psi(g) = \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_k} + cg\bar{g} \Big) d\Omega + \int\limits_\Gamma \sigma |g|^2 d\Gamma - 2\mathrm{Re} \int\limits_\Gamma g \bar{\varphi}_2 \, d\Gamma$$

на всех функциях с конечным интегралом Дирихле. Это известный функционал классического метода.

В качестве $\Phi_1(g)$ можно принять

$$\Phi_1(g) = \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_k} + cg\bar{g} \Big) d\Omega + \int\limits_\Gamma \frac{1}{\sigma} \Big| \frac{\partial g}{\partial \nu} \Big|^2 d\Gamma$$

на функциях, удовлетворяющих условию $\frac{\partial g}{\partial \nu} + \sigma g \Big|_\Gamma = \varphi_2$. Наконец,

$$\Phi_2(u) = \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} + cu\bar{u} \Big) d\Omega + \int\limits_\Gamma \frac{1}{\sigma} \Big| \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|^2 d\Gamma - 2\mathrm{Re} \int\limits_\Gamma \frac{1}{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \bar{\varphi}_2 \, d\Gamma.$$

Число таких примеров можно было бы увеличить.

В заключение отметим, что аналогичные результаты можно получить для уравнений высших порядков, например, в бигармонической проблеме.

Ленинградский горный институт

Поступило 17 X 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, Матем. сборн., **20** (62) : 3, 431 (1947). [2] М. И. Вишик, Тр. Московск. матем. об-ва, **1** (1952). [3] М. Ш. Бирман, ДАН, **91** № 2 (1953). [4] М. Ш. Бирман, ДАН, **92**, № 2 (1953). [5] К. Фридрихс, Math. Ann., **109**, H. 4—5 (1934). [6] С. Г. Михлин, Проблема минимума квадратичного функционала, 1952. [7] С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, 1950, [8] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950.