Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 4

МАТЕМАТИКА

П. П. БЕЛИНСКИЙ

О МЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ КВАЗИ-КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 5 X 1953)

Пфлюгер [1] вводит следующий класс отображений: гомеоморфное отображение $w = f(z)$ круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ называется квази-конформным, если функция $f(z)$ дифференцируема почти всюду в $|z| < 1$ и почти всюду $|dw/dz|^2 \leqslant Q|d\sigma_w/d\sigma_z|$, где dz, dw, $d\sigma_w$, $d\sigma_z$ — соответственно, линейные элементы и элементы площади в плоскостях z и w. Автор заметки утверждает в этом случае гомеоморфность отображения вплоть до границы включительно (без доказательства) и доказывает, что замкнутое множество линейной меры нуль на окружности $|z| = 1$ переходит во множество меры нуль на окружности $|w| = 1$. Однако для столь широкого класса функций оба эти утверждения являются неверными, как показывают следующие примеры.

Пример 1. Пусть $\varphi(r)$ — функция со следующими свойствами: 1) $\varphi(r)$ определена и непрерывна на полуинтервале $0 \leqslant r < 1$; 2) $\varphi(r)$ монотонна, причем $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = \infty$; 3) $\varphi(r)$ принимает постоянные значения на интервалах смежности некоторого совершенного множества меры нуль отрезка $0 \leqslant r \leqslant 1$. Построение подобных функций известно. Тогда, если $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{it}$, то функция $w = f_1(z)$, задаваемая соотношениями $\rho = r$, $\theta = t + \varphi(r)$, осуществляет гомеоморфное отображение круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$, которое является почти всюду конформным, причем гомеоморфность не может быть продолжена на границу области.

Пример 2. Пусть P — некоторое совершенное множество меры нуль на окружности $|z| = 1$ и пусть его интервалы смежности $\{L_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ имеют центры в точках θ_k и длины l_k, $\sum_{k=1}^{\infty} l_k = 2\pi$. Построим на окружности $|w| = 1$ совершенное множество P' следующим образом. Интервалы смежности P', пусть $\{L'_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, имеют центры в точках $t_k = \theta_k$ и длины $l'_k = {}^1/_2\, l_k$. Пусть, наконец, $\theta = \psi(t)$ — функция, гомеоморфно отображающая окружность $|z| = 1$ на окружность $|w| = 1$ так, что интервалы L_k линейно переходят в интервалы L'_k, а множество P преобразуется в P'. Тогда функция $w = f_2(z)$, задаваемая соотношениями $\rho = \sqrt{r}$, $\theta = \psi(t)$, осуществляет гомеоморфное отображение замкнутого круга $|z| \leqslant 1$ на круг $|w| \leqslant 1$ конформное почти всюду, но переводящее граничное совершенное множество P меры нуль в множество P' меры π.

Ошибка доказательства заключается в том, что длина образа окружности $|z|=r$ в круге $|w|<1$ $\lambda(r)$ и $\int\limits_{|z|=r}\left|\frac{dw}{dz}\right||dz|$ вообще не равны почти всюду, как полагает автор. Для того чтобы указанная теорема была справедлива, необходимо ввести дополнительные требования, в качестве которых можно взять любое из следующих:

1°. $f(z)$ осуществляет гомеоморфное отображение замкнутого круга $|z|\leqslant 1$ и обладает N-свойством почти на всех сечениях $|z|=r$, т. е. переводит почти на всех указанных сечениях совершенные множества меры нуль в множества длины нуль (2).

2°. Всюду, исключая быть может счетное множество точек, функция $w=f(z)$ переводит бесконечно малую окружность с центром в точке z_0, $|z-z_0|=r$, в такую кривую, что

$$\varlimsup_{r\to 0}\frac{\max\limits_{|z|=r}|w-w_0|}{\min\limits_{|z|=r}|w-w_0|}\leqslant Q(z)<\infty.$$

Из 2° следует 1° (об N-свойстве в этом случае см. (3)).

3°. $f(z)$ принадлежит в замыканию класса непрерывно дифференцируемых квази-конформных отображений с равномерно ограниченной характеристикой Q.

Из 3° следует 1° и 2° (см. (4)).

При выполнении одного из указанных условий (в конечном счете условия 1°) рассуждения, проведенные при доказательстве указанной теоремы, становятся законными, и теорема в этом случае имеет место.

Кроме того, в силу одной из теорем Н. Н. Лузина ((5), п. 47), из того, что всякое совершенное множество меры нуль на границе переходит во множество меры нуль, следует выполнение этого свойства для произвольного множества меры нуль, уже не обязательно замкнутого. Опираясь еще на теорему Банаха — Зарецкого (6), получаем следующий результат:

Теорема. *Если функция $w=f(z)$ осуществляет гомеоморфное отображение круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$, дифференцируема почти всюду, причем* $\left|\frac{dw}{dz}\right|^2<Q\left|\frac{d\sigma_w}{d\sigma_z}\right|$ *и, кроме того, выполняется одно из условий* 1°—3°, *то отображение гомеоморфно в замкнутом круге, причем на окружности $|z|=1$ оно абсолютно непрерывно*.*

Поступило
26 VIII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 A. Pfluger, C. R., **226**, 623 (1948). 2 Д. Меньшов, Les conditions de monogénéité, Paris, 1936. 3 Н. С. Штейнберг, Матем. сборн., **17** (59), № 1, 39 (1945). 4 М. А. Лаврентьев, Матем. сборн., **42**:4, 407 (1935). 5 Н. Н. Лузин, Интеграл и тригонометрический ряд, 2-е изд., 1951. 6 И. П. Натансон, Основы теории функций действительного переменного, 1950.

* В моей заметке „Поведение квази-конформного отображения в изолированной точке“, опубликованной в ДАН, т. XCI, № 4, в формулировке леммы 2 напечатано $|\arg w(z)-\arg z|_{\text{на }\Gamma_z}\leqslant\varepsilon$, следует читать $|\arg w(z)-\arg z|_{\text{на }\Gamma_2}\leqslant\varepsilon$; напечатано $|\arg w(z)-\arg z-\delta|\leqslant\varepsilon$, следует читать $|\arg w(z)-\arg z-\delta|_{\text{на }\Gamma_1}\leqslant\varepsilon$.