

Н. И. АХИЕЗЕР

О СЛАБО ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЯХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 14 X 1953)

Предметом настоящей заметки является обобщение теоремы С. Н. Бернштейна о слабо весовых функциях (теорема В* заметки (1)), аналогичное недавнему (см. (2)) обобщению теоремы о весовых функциях.

Следуя С. Н. Бернштейну (3), назовем функцию $\Phi(x) > 0$ ($-\infty < x < \infty$) слабо весовой относительно целых функций степени $\leq p$ ($0 \leq p < \infty$) (коротко: p -слабо весовой), если для любой непрерывной функции $f(x)$, удовлетворяющей условию $\lim_{\pm x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\Phi(x)} = 0$, при любом $\varepsilon > 0$ можно найти целую функцию $H(z)$ степени $\leq p$ так, чтобы

$$\|f - H\|_{\Phi} \equiv \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{|f(x) - H(x)|}{\Phi(x)} < \varepsilon. \quad (1)$$

Обозначим через K_p совокупность всех целых функций $G(z)$ степени $\leq p$, для которых $0 < |G(x)| \leq \Phi(x)$ ($-\infty < x < \infty$), и будем говорить, что $\Phi(x)$ обладает свойством B_p , если $\sup_{G \in K_p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |G(x)|}{1+x^2} dx = \infty$.

Теорема 1. Если функция $\Phi(x) \geq 1$ ($-\infty < x < \infty$) обладает свойством B_p , то она p -слабо весовая.

Теорема 2*. Если $\Phi(x) \geq 1$ ($-\infty < x < \infty$) есть p -слабо весовая функция и если множество точек, где $\Phi(x)$ конечна, имеет предельную точку на конечном расстоянии, то $\Phi(x)$ обладает свойством B_p .

Доказательство теоремы 1 опирается (ср. (2)) в установление следующего факта: для любого вещественного k , численно ≥ 1 , при любом $\varepsilon > 0$ можно найти целую функцию $H(z)$ степени $\leq p$ так, чтобы

$$\left\| \frac{1}{x - ki} - H(x) \right\|_{\Phi} < \varepsilon.$$

При доказательстве этого положения придется различать два случая.

Случай I. В классе K_p существует функция, назовем ее $G(z)$, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |G(x)|}{1+x^2} dx = \infty \quad (2)$$

* Вытекает из следствия (2) заметки (1) в силу примечания в (2).

ПОПРАВКА

В ДАН, т. 93, № 5, 1953 г. в оглавлении номера по вине корректуры вкралась грубая опечатка: на стр. 754 в строке 31 фамилия автора ошибочно помещена в рамке. Вместо напечатанного следует читать:

Член-корреспондент АН СССР А. И. Бродский. Механизм изотопного обмена водорода в растворах.

и которая поэтому имеет бесконечное число корней, так что

$$G(z) = e^{az+b} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{c_m}\right) e^{z/c_m}.$$

При этом (см. (4))

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \Im \frac{1}{c_m} \right| = \infty, \quad (3)$$

тогда как по известной теореме Линделёфа ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \Im \frac{1}{c_m}$ сходится.

Возьмем какое-нибудь натуральное n и положим $Q_n(z) = e^b \prod_{m=1}^n \left(1 - \frac{z}{c_m}\right)$, $h_n(z) = \frac{G(z)}{Q_n(z)}$, так что $h_n(z)$ также целая функция степени $\leq p$. Далее обозначим через $P_n(x)$ многочлен степени $\leq n$, наименее уклоняющийся от $(x - ki)^{-1}$ относительно веса $|Q_n(x)|$, и пусть

$$\mathcal{E}_n = \left\| \frac{1}{x - ki} - P_n \right\|_{|Q_n|} = \sup_{-\infty < x < \infty} \left| \frac{\frac{1}{x - ki} - P_n(x)}{Q_n(x)} \right|. \quad (4)$$

Из (3) вытекает ((6), стр. 264), что $\mathcal{E}_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Теперь перепишем (4):

$$\mathcal{E}_n = \sup_{-\infty < x < \infty} \left| \frac{\frac{h_n(x)}{x - ki} - h_n(x) P_n(x)}{G(x)} \right| = \sup_{-\infty < x < \infty} \left| \frac{\frac{h_n(ki)}{x - ki} - h_n(ki) S_{p,n}(x)}{G(x)} \right|,$$

где $S_{p,n}(z)$ — целая функция степени $\leq p$, если $h_n(ki) \neq 0$, что наверно будет иметь место при достаточно большом n . Итак,

$$\left\| \frac{1}{x - ki} - S_{p,n}(x) \right\|_{\Phi} \leq \left\| \frac{1}{x - ki} - S_{p,n}(x) \right\|_{|G|} = \frac{\mathcal{E}_n}{|h_n(ki)|},$$

и остается убедиться, что величина $|h_n(ki)|^{-1}$ при $n \rightarrow \infty$ ограничена. Но из представления

$$h_n(z) = e^{az} \exp\left(\sum_{m=1}^n \frac{z}{c_m}\right) \prod_{m=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{c_m}\right) e^{z/c_m}$$

следует, что

$$\frac{1}{|h_n(ki)|} = \exp(-k \Im a) \cdot \left| \prod_{m=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{ki}{c_m}\right) e^{ki/c_m} \right|^{-1} \cdot \exp\left(k \Im \sum_{m=1}^n \frac{1}{c_m}\right),$$

где первый множитель от n не зависит, третий при $n \rightarrow \infty$ ограничен, а второй при $n \rightarrow \infty$ стремится к 1.

Случай II. Для каждой функции $G(z) \in K_p$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |G(x)|}{1+x^2} dx < \infty.$$

Возьмем функцию $G(z) \in K_p$. Тогда $R(z) = G(z)\bar{G}(z)$, где черта означает переход к комплексно-сопряженным коэффициентам, есть целая функция степени $2\rho \leq 2p$, для которой $R(x) > 0$ ($-\infty < x < \infty$) и $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln R(x)}{1+x^2} dx < \infty$. Поэтому (4) $R(z) = g(z)\bar{g}(z)$, где

$$g(z) = e^{az+b} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_m - i\beta_m}\right) e^{\alpha_m z / (\alpha_m^2 + \beta_m^2)} \quad (5)$$

есть целая функция степени ρ , $a \geq 0$, $b \geq 0$, $\beta_m > 0$.

Теперь напишем тождество ($k \geq 1$)

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} \left\{ \frac{x+ki}{x-ki} \sqrt{\frac{g(x)}{\bar{g}(x)}} e^{i\delta} + \frac{x-ki}{x+ki} \sqrt{\frac{\bar{g}(x)}{g(x)}} e^{-i\delta} \right\} = \\ = \frac{1}{|G(x)|} \left\{ \frac{D}{x-ki} + \frac{\bar{D}}{x+ki} - H(x) \right\}, \end{aligned}$$

где параметры $L > 0$ и $\delta \geq 0$ связаны с наперед заданным комплексным числом D соотношением $D = Lkie^{i\delta}g(ik)$, а $H(z)$ — некоторая целая функция степени ρ . Оно показывает, что погрешность наилучшего при весе $|G(x)|$ приближения функции $\frac{D}{x-ki} + \frac{\bar{D}}{x+ki}$ посредством целой функции степени $\leq \rho$ не превосходит L . С другой стороны, при $y = \Im z > 0$

$$\ln |g(z)| = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |g(t)|}{(t-x)^2 + y^2} dt + \tau y, \quad (6)$$

где $\tau = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln |g(iy)|}{y}$, как это вытекает из одного общего предложения Б. Я. Левина (5). Но индикатор роста $h_g(\varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |g(re^{i\varphi})|}{r}$ функции $g(z)$ численно не превосходит ее степени. Поэтому * $\tau \geq -\rho \geq -p$. Из сказанного следует, что

$$\begin{aligned} L = \frac{|D|}{k} \frac{1}{|g(ki)|} \leq \frac{|D|}{|g(i)|} = \\ = |D| e^{-\tau} \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |g(t)|}{1+t^2} dt \right\} \leq |D| e^{\rho} \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |G(t)|}{1+t^2} dt \right\}. \end{aligned}$$

Так как функция $\Phi(x)$ по условию обладает свойством B_p , то при надлежащем выборе функции $G(z) \in K_p$ правая часть может быть сделана сколь угодно малой, и доказательство закончено.

Переходя к теореме 2, заметим, что для ее доказательства достаточно установить компактность в каждой конечной части полосы $|\Im z| \leq 1$ множества $\mathfrak{M}(p, C)$ ($0 < C < \infty$) всех целых функций $g(z)$ степени $\leq p$ вида (5), где $\beta_m > 0$, $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{\alpha_m^2 + \beta_m^2} < \infty$ и $a \geq 0$, удовлетворяющих следующим условиям: $|g(x)| \geq 1$ ($-\infty < x < \infty$),

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |g(t)|}{1+t^2} dt \leq C.$$

* Можно доказать, что $\tau = \rho$, но это для дальнейшего не важно

Чтобы доказать эту компактность, возьмем функцию $g(z) \in \mathfrak{M}(p, C)$ и ее представление (6) при $y = \Im z > 0$, где $-p \leq \tau \leq p$. Полагая $\frac{\ln |g(t)|}{1+t^2} = \varphi(t)$, представим (6) в виде

$$\ln |g(z)| = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(t-x)^2 + y^2} \varphi(t) dt + \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-x)^2 + y^2} \varphi(t) dt + \tau y. \quad (6)$$

Отсюда с помощью интегрирования по частям и несложных оценок находим, что $\ln |g(z)| \leq C \frac{x^2 + y^2 + 1}{y} + py$. Поэтому $|g(x-i)| \leq |g(x+i)| \leq e^{p+2C} e^{Cx^2}$ ($-\infty < x < \infty$). Следовательно, регулярная в полосе $|\Im z| \leq 1$ функция $F(z) = e^{-Cz^2} g(z)$ на сторонах этой полосы ограничена, а именно $|F(x \pm i)| \leq e^{p+3C}$ ($-\infty < x < \infty$), и поскольку $g(z)$ — функция конечной степени, $F(z)$ равномерно стремится к нулю при $\pm x \rightarrow \infty, |y| \leq 1$. Отсюда, в силу элементарного принципа максимума, во всей полосе $|\Im z| \leq 1$ $|F(z)| \leq e^{p+3C}$, а значит, $|g(z)| \leq e^{p+3C} e^{Cx^2}$, и требуемая компактность установлена.

Замечание. Как мы, между прочим, доказали, из $g(z) \in \mathfrak{M}(p, C)$ следует, что при $-1 \leq x \leq 1$ справедливо неравенство $|g(x)| \leq e^{p+4C}$. Это позволяет доказать, что для любого z всякая функция $g(z) \in \mathfrak{M}(p, C)$ удовлетворяет неравенству

$$|g(z)| \leq e^{(p+4C)(|z|+1)}, \quad (7)$$

соответствующему ранее установленному С. Н. Бернштейном ((1), формула (9)) *.

Действительно, из (6) при $y \neq 0$ и $\psi(t) = \frac{\ln |g(t)|}{t^2}$ следует:

$$\ln |g(z)| \leq (p+4C) \frac{|y|}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dt}{(x-t)^2 + y^2} + \frac{|y|}{\pi} \int_{|t|>1} \frac{t^2 \psi(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt + p|y|.$$

Отсюда, интегрируя по частям, как и выше, получаем, что

$$\ln |g(z)| \leq p+4C + p|y| + \frac{2C(x^2 + y^2)}{|y|}.$$

Значит, $|g(z)| \leq e^{p+4C} e^{(p+4C)|y|}$ на биссектрисах $y = \pm x$, откуда по теореме Фрагмен — Линделёфа и следует (7) для любого z .

Поступило
18 IX 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Н. Бернштейн, ДАН, 90, № 5 (1953). ² С. Н. Бернштейн, Н. И. Ахиезер, ДАН, 92, № 6 (1953). ³ С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, сер. матем., 16, 497 (1952). ⁴ Н. И. Ахиезер, ДАН, 63, № 5 (1948). ⁵ Б. Я. Левин, ДАН, 71, № 4 (1950). ⁶ Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, М.—Л., 1947.

* Из этого соотношения С. Н. Бернштейн и выводит (1) следствие 2, которое можно сформулировать следующим образом: *если функция $\Phi(x) \geq 1$ не удовлетворяет условию Вр, то она является майорантой квази-конечного роста относительно целых функций степени $\leq p$.*