# Пороговые пересуммирующие факторы в релятивистском квазипотенциальном подходе

$\boxed{\text{И. Л. Соловцов}}$, Ю. Д. Черниченко

*Международный центр перспективных исследований,*
*Гомельский государственный технический университет,*
*пр. Октября 48, 246012, г. Гомель, Республика Беларусь*

**Аннотация**

Квазипотенциальный подход в квантовой теории поля, сформулированный в релятивистском конфигурационном представлении, используется для получения релятивистских пороговых пересуммирующих факторов в квантовой хромодинамике для произвольного орбитального момента $\ell \geq 0$.

## 1 Введение

Известно, что в области вблизи порога рождения кварковой пары ограничиться конечным порядком теории возмущений нельзя [1]. Причина состоит в том, что в пертурбативном разложении участвуют не просто степени константы сильного взаимодействия $\alpha_s$, а присутствуют так же степени фактора $1/v$, который обладает сингулярностью на пороге рождения кварковой пары ($v = \sqrt{1 - 4m^2/s}$, $m$ — масса кварка). Все такие пороговые сингулярности должны быть просуммированы. В нерелятивистском случае для кулоновского взаимодействия

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \tag{1}$$

это суммирование осуществляет известный $S$-фактор Зоммерфельда–Сахарова [2, 3]

$$S_{\rm nr} = \frac{X_{\rm nr}}{1 - \exp(-X_{\rm nr})}, \qquad X_{\rm nr} = \frac{\pi\,\alpha}{v_{\rm nr}}, \tag{2}$$

который связан с $s$-волновой функцией непрерывного спектра в нуле через $|\psi(0)|^2$. Здесь $2v_{\rm nr}$ есть относительная скорость двух нерелятивистских частиц.

Релятивистское обобщение $S$-фактора было найдено в работе К. А. Милтона и И. Л. Соловцова [4]. Для этой цели удобным оказался квазипотенциальный подход, сформулированный А. А. Логуновым и А. Н. Тавхелидзе

[5] в форме, предложенной В. Г. Кадышевским [6]. В работе [4] был использован переход от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению (РКП), введенному в [7]. Важно отметить, что при этом был использован рассмотренный в [8] квазипотенциал, учитывающий свойство асимптотической свободы в КХД. Решение с $i$-периодическим фактором с таким квазипотенциалом было получено в [9]. Однако использование такого решения оказалось адекватным лишь для спектральных задач. Другая форма квазипотенциального уравнения с кулоновским потенциалом была исследована в [10].

Для определения релятивистских пересуммирующих факторов потребовалась разработка новых методов [4, 11, 12]. Таким образом, в [4] был сделан новый шаг в применении квазипотенциального подхода в КХД. Релятивистское обобщение $S$-фактора (2) имеет вид [4]:

$$S(\chi) = \frac{X(\chi)}{1 - \exp[-X(\chi)]}, \qquad X(\chi) = \frac{\pi\,\alpha}{\operatorname{sh}\chi} = \pi\alpha\frac{\sqrt{1-v^2}}{v}, \tag{3}$$

где быстрота $\chi$ связана с энергией $\sqrt{s}$ соотношением $2\,m\operatorname{ch}\chi = \sqrt{s}$.

Появление пересуммирующего фактора, который может быть определен на основе квазипотенциального подхода, в функции $R(s)$ (отношение адронного и лептонного полных сечений процесса $e^+e^-$-аннигиляции) связано с тем обстоятельством, что в двухчастичном приближении $R(s)$ выражается через волновую функцию Бете–Солпитера при $x = 0$ [13]. Следовательно, в этом случае относительное время также равно нулю и волновая функция Бете–Солпитера может быть выражена через квазипотенциальную волновую функцию [4]. Применение релятивистского $S$-фактора для описания ряда характеристик адронных процессов можно найти в работах [11, 14–17]. Релятивистский пересуммирующий $P$-фактор ($\ell = 1$ состояние) был найден в работе [12], в которой так же было предложено новое модельное выражение для функции $R(s)$, где пороговые сингулярности были просуммированы в основной потенциальный вклад.

В данной работе на основе сформулированного в РКП квазипотенциального подхода [7] получены выражения для релятивистских пороговых факторов для случая произвольного значения орбитального момента $\ell \geq 0$.

## 2 Интегральная форма квазипотенциального уравнения

В импульсном пространстве квазипотенциальное уравнение имеет вид

$$(2E - 2E_p)\,\psi_{\mathrm{QP}}(\boldsymbol{p}) = \int d\Omega_k\, V\,(\boldsymbol{p}(-)\boldsymbol{k})\,\psi_{\mathrm{QP}}(\boldsymbol{k}), \tag{4}$$

где $d\Omega_p = d\boldsymbol{p}/[(2\pi)^3 E_p]$ есть релятивистский трехмерный объем в пространстве Лобачевского, которое реализуется на гиперболоиде $E_p^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2$. В дальнейшем будет использовать систему единиц, в которой $c = \hbar = m = 1$.

Отметим, что чистые преобразования Лоренца $\Lambda_{\boldsymbol{k}}$ означают сдвиг в пространстве Лобачевского: $\Lambda_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(+)\boldsymbol{k}$. При этом роль "плоских волн", связанных с такими трансляциями, играют функции

$$\xi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}) = (E_p - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n})^{-1-ir}\,, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}r$ и $\boldsymbol{n}^2 = 1$. Эти функции соответствуют основной серии унитарных представлений группы Лоренца. В нерелятивистском пределе, когда $p \ll 1$, $r \gg 1$, функции (5) переходят в известные нерелятивистские плоские волны $\xi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}) \to \exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})$. Кроме того, функции (5) образуют полную и ортогональную систему функций. Это позволяет перейти от импульсного представления к $r$-представлению, называемому РКП [7], в котором волновые функции в пространстве моментов и в РКП связаны соотношениями

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \int d\Omega_p\,\xi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})\,\psi_{\rm QP}(\boldsymbol{p})\,, \qquad \psi_{\rm QP}(\boldsymbol{p}) = \int d\boldsymbol{r}\,\xi^*(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})\,\psi(\boldsymbol{r}). \tag{6}$$

В РКП квазипотенциальное уравнение (4) формально имеет локальный вид

$$\left(2E - 2\hat{H}_0\right)\psi(\boldsymbol{r}) = V(r)\,\psi(\boldsymbol{r}), \tag{7}$$

а свободный гамильтониан $\hat{H}_0$ является конечно-разностным оператором, построенным из операторов сдвига $\exp{(i\,d/dr)}$:

$$\hat{H}_0 = \mathrm{ch}\,\left(i\frac{d}{dr}\right) + \frac{i}{r}\mathrm{sh}\,\left(i\frac{d}{dr}\right) - \frac{\Delta_{\theta,\varphi}}{2r^2}\exp\left(i\frac{d}{dr}\right),$$

где $\Delta_{\theta,\varphi}$ есть угловая часть оператора Лапласа. При этом релятивистские плоские волны (5) удовлетворяют конечно-разностному уравнению $\hat{H}_0\,\xi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}) = E_p\,\xi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})$.

Для сферически симметричных потенциалов $\xi$-преобразование уравнения (4) приводит к уравнению

$$\int d\Omega_p\,d\boldsymbol{r}'\;(2E - 2E_p)\;\xi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})\,\xi^*(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}')\,\psi(\boldsymbol{r}') = V(r)\,\psi(\mathbf{r})\,, \tag{8}$$

правая сторона которого уже является локальной в РКП.

Используя парциальное разложение релятивистских плоских волн (5) и волновой функции $\psi(\boldsymbol{r})$ в форме

$$\xi(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\, i^{\ell}\, p_{\ell}(\mathrm{ch}\,\chi_p,\, r)\, P_{\ell}\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{p\, r}\right),$$

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\, i^{\ell}\, \frac{\varphi_{\ell}(r,\, \chi)}{r}\, P_{\ell}\left(\frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}{q\, r}\right),$$

а также формулу [7]

$$p_{\ell}(\mathrm{ch}\,\chi,\, r) = \frac{(-1)^{\ell}\,(\mathrm{sh}\,\chi)^{\ell}}{r^{(\ell+1)}} \left(\frac{d}{d\mathrm{ch}\,\chi}\right)^{\ell} \left(\frac{\sin r\chi}{\mathrm{sh}\,\chi}\right),$$

уравнение (8) можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered} \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} d\chi' \frac{(\mathrm{sh}\,\chi')^{2\ell+2}\,(-1)^{\ell+1}}{r^{(\ell+1)}}\,(2\mathrm{ch}\,\chi - 2\mathrm{ch}\,\chi')\left(\frac{d}{d\mathrm{ch}\,\chi'}\right)^{\ell}\left(\frac{\sin r\chi'}{\mathrm{sh}\,\chi'}\right)\times \\ \times\left(\frac{d}{d\mathrm{ch}\,\chi'}\right)^{\ell}\frac{1}{\mathrm{sh}\,\chi'}\int\limits_0^{\infty} dr' \frac{r'\sin r'\chi'}{(-r')^{(\ell+1)}}\,\varphi_{\ell}(r',\chi) = \frac{V(r)\,\varphi_{\ell}(r,\chi)}{r}\,. \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь

$$p_{\ell}(\mathrm{ch}\,\chi,\, r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\mathrm{sh}\,\chi}}\,\frac{(-1)^{\ell+1}}{r}(-r)^{(\ell+1)}\, P^{-1/2-\ell}_{-1/2+ir}(\mathrm{ch}\,\chi) \tag{10}$$

есть решение уравнения (7) в случае, если взаимодействие выключено ($V(r)\equiv 0$); функция $P^{\nu}_{\mu}(\mathrm{ch}\,\chi)$ – это функция Лежандра первого рода, а $\chi$– быстрота, связанная с $E$ соотношением $E=\mathrm{ch}\,\chi$; функция

$$(-r)^{(\ell+1)} = i^{\ell+1}\frac{\Gamma(\ell+1+ir)}{\Gamma(ir)}$$

называется обобщенной степенью [7], где $\Gamma(z)$ есть гамма-функция.

## 3 Релятивистские пороговые пересуммирующие факторы

Рассмотрим кулоновский потенциал (1) в РКП. Применяя $\xi$-преобразование, в импульсном пространстве получаем

$$V(\Delta) \sim \frac{1}{\chi_{\Delta}\mathrm{sh}\,\chi_{\Delta}}, \tag{11}$$

где относительная быстрота $\chi_\Delta$ соответствует $\Delta = p(-)k$ и определяется квадратом переданного импульса $Q^2 = -(p-k)^2 = 2(\mathrm{ch}\,\chi_\Delta - 1)$.

Отметим, при больших значениях $Q^2$ потенциал (11) ведет себя как $(Q^2 \ln Q^2)^{-1}$, то есть имеет характерную для квантовой хромодинамики дополнительную логарифмическую зависимость от $Q^2$, обусловленную законом эволюции инвариантного заряда. Такое поведение потенциала (1) в случае КХД было замечено в работе [8].

Для решения квазипотенциального уравнения (9) с кулоновским потенциалом (1) будем использовать метод, развитый в [4, 12, 18]. В этом случае решение ищется в виде

$$\frac{r\,\varphi_\ell(r,\chi)}{(-r)^{(\ell+1)}} = \int\limits_\alpha^\beta d\zeta \exp(ir\zeta)\, R_\ell(\zeta,\chi)\,, \tag{12}$$

где $\zeta$-интегрирование выполняется в комплексной плоскости вдоль контура с концевыми точками $\alpha$ и $\beta$ как в [4, 12, 18]: $\alpha = -R - i\varepsilon$, $\beta = -R + i\varepsilon$, $R \to +\infty\,, \varepsilon \to +0$. Подставляя (12) в (9) и принимая во внимание, что

$$\frac{1}{i\pi}\int\limits_0^\infty dr' \sin(r'\chi')\,\exp(ir'\zeta) = \frac{1}{i\pi}\frac{\chi'}{\chi'^2 - \zeta^2}\,,$$

приходим к уравнению

$$\begin{aligned}(-1)^\ell \int\limits_\alpha^\beta d\zeta\, R_\ell(\zeta,\chi)\left(\frac{d}{d\mathrm{ch}\,\zeta}\right)^\ell \Bigg[(\mathrm{sh}\,\zeta)^{2\ell+1}\,(2\mathrm{ch}\,\chi - 2\mathrm{ch}\,\zeta)\left(\frac{d}{d\mathrm{ch}\,\zeta}\right)^\ell \times \\ \times\left(\frac{\exp(ir\zeta)}{\mathrm{sh}\,\zeta}\right)\Bigg] = -\frac{\alpha}{r}\prod_{n=1}^{\ell}(r^2+n^2)\int\limits_\alpha^\beta d\zeta\,\exp(ir\zeta)\,R_\ell(\zeta,\chi)\,.\end{aligned} \tag{13}$$

Следует отметить, что решение уравнения (13), а значит и уравнения (9), уже не содержит $i$-периодических констант, т. е. функций от $r$ с периодом $i$, которые появляются в решениях уравнения (7) из-за конечно-разностной природы свободного гамильтониана. Впервые решение уравнения (13) при $\ell = 0$, несодержащее произвольной $i$-периодической функции, было получено в [4]. Этот подход привел к релятивистскому $S$-фактору (3). Напомним, функция Бете–Солпитера $\chi_{\mathrm{BS}}(x=0)$ связана с квазипотенциальной волновой функцией $\psi_{\mathrm{QP}}(\mathbf{p})$ выражением $\chi_{\mathrm{BS}}(x=0) = \int d\Omega_p\, \psi_{\mathrm{QP}}(\boldsymbol{p})$. Тогда, принимая во внимание выражение (5), ее связь с квазипотенциальной функцией в РКП имеет вид $\chi_{\mathrm{BS}}(x=0) = \psi(r=i)$.

Релятивистский $S$-фактор, который входит в выражение для $R(s)$-отношения процесса $e^+e^-$-аннигиляции в адроны, связан с коррелятором векторных кварковых токов. Для того, чтобы выполнить пороговое пересуммирование в случае аксиально-векторных токов, необходимо использовать релятивистский $P$-фактор [12], отвечающий $\ell = 1$ состоянию.

Отметим, что нерелятивистский $S$-фактор определяется шредингеровской волновой функцией при $r = 0$, а релятивистский $S$-фактор связан с квазипотенциальной волновой функцией при $r = i$. В то же время для $p$-волны нерелятивистский пересуммирующий фактор определяется производной волновой функции при $r = 0$, тогда как в релятивистском случае вместо производной необходимо использовать ее конечно-разностный аналог, а именно, $P$-фактор выражается через $\Delta^*[\varphi_1(r', \chi)/r]$ при $r = i$, где конечно-разностная производная дается выражением [7]

$$\Delta^* = \frac{1}{i}\left[\exp\left(i\frac{d}{dr}\right) - 1\right]. \tag{14}$$

Таким образом, релятивистский $P$-фактор связан с квазипотенциальной парциальной волновой функцией $\varphi_1(r, \chi)$ ($\ell = 1$) соотношением

$$P(\chi) = \lim_{r \to i}\left|\frac{3}{\operatorname{sh}\chi}\Delta^*\left(\frac{\varphi_1(r,\chi)}{r}\right)\right|^2. \tag{15}$$

Решение квазипотенциального уравнения (13) при $\ell = 1$ приводит к следующему выражению для волновой функции:

$$\varphi_1(r,\chi) = C_1(\chi)\frac{r}{r^{(2)}}\int\limits_{\alpha}^{\beta} d\zeta \frac{\exp[(ir+2)\zeta]}{(\exp\zeta - \exp\chi)^4}\left[\frac{\exp\zeta - \exp(-\chi)}{\exp\zeta - \exp\chi}\right]^{-2+iA}, \tag{16}$$

где

$$A = \frac{\alpha}{2\operatorname{sh}\chi}.$$

Выполняя в (16) $\zeta$-интегрирование в комплексной плоскости вдоль контура с концевыми точками $\alpha$ и $\beta$ (так же, как в работах [4, 18]), получаем следующее результирующее решение, не содержащее произвольной $i$-периодической функции

$$\begin{aligned}\varphi_1(r,\chi) = -C_1(\chi)\frac{2r\operatorname{sh}(\pi r)}{r^{(2)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\exp[(ir+2)x]}{(\exp x + \exp\chi)^4}\times \\ \times\left[\frac{\exp x + \exp(-\chi)}{\exp x + \exp\chi}\right]^{-2+iA}\end{aligned} \tag{17}$$

Нормировочный множитель $C_1(\chi)$ находится из сравнения асимптотического поведения функции (17), которая при $r \to \infty$ имеет вид

$$\varphi_1(r,\chi) \longrightarrow \frac{\pi C_1(\chi)}{2\mathrm{sh}^2\chi} e^{-iA\chi - A\pi/2} \left[ \frac{e^{ir\chi}}{\Gamma(2+iA)} + \frac{e^{-ir\chi}}{\Gamma(2-iA)} \right], \ r \to \infty,$$

с асимптотикой $\sin(r\chi - \pi/2)/\mathrm{sh}\,\chi$ свободной волновой функции $r\,p_1(\mathrm{ch}\,\chi,\, r)$.

Далее, используя соотношения (14), (15) и (17), получаем следующее выражение для релятивистского $P$-фактора [12]

$$P(\chi) = \left(1 + \frac{\alpha^2}{4\,\mathrm{sh}^2\chi}\right) \frac{X(\chi)}{1 - \exp[-X(\chi)]}, \tag{18}$$

где функция $X(\chi)$ определена в (3).

В ультрарелятивистском пределе, как это было показано в [19], спектр связанных состояний исчезает, когда масса $m \to 0$, так как масса частицы является единственным размерным параметром. Эта особенность отражает существенное различие между потенциальными моделями и квантовой теорией поля, где появляется дополнительный размерный параметр. Поэтому можно заключить, что $S$- и $P$-факторы, которые соответствуют непрерывному спектру, должны стремиться к 1 при $m \to 0$. Таким образом, в отличие от нерелятивистского случая, релятивистские пороговые пересуммирующие факторы (3) и (18) воспроизводят как известный нерелятивистский предел, так и ультрарелятивистский $S,\ P \to 1$.

Релятивистский пересуммирующий пороговый фактор для произвольного орбитального момента $\ell$ определяется выражением

$$L(\chi) = \lim_{r \to i} \left| \frac{\Gamma(2\ell+2)}{(2\mathrm{sh}\,\chi)^\ell\, \Gamma^2(\ell+1)} (\Delta^*)^\ell \left[ \frac{\varphi_\ell(r,\chi)}{r} \right] \right|^2, \tag{19}$$

где волновая функция $\varphi_\ell(r,\chi)$ находится через решение уравнения (13) аналогично случаю $\ell = 1$. Это приводит к следующему выражению

$$\begin{aligned} \varphi_\ell(r,\chi) = {} & N_\ell(\chi)(-r)^{(\ell+1)} \exp[ir\chi + iA\chi + i\pi(\ell+1)] \times \\ & \times F\left(\ell + 1 - iA\,, \ell + 1 - ir\,; 2\ell + 2\,; 1 - \exp(-2\chi)\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Нормировочный множитель $N_\ell(\chi)$ в (20) находится из условия

$$\lim_{r \to 0} \varphi_\ell(r,\chi) = r\,p_\ell(\mathrm{ch}\,\chi,\, r) \longrightarrow \frac{\sin(r\chi - \pi\ell/2)}{\mathrm{sh}\,\chi} \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

где функция $p_\ell(\mathrm{ch}\,\chi,\, r)$ определена в (10).

Используя соотношения (14), (19) и (20), находим искомое выражение для релятивистского $L$-фактора

$$L(\chi) = \frac{X(\chi)}{1 - \exp[-X(\chi)]} \prod_{n=1}^{\ell} \left[ 1 + \left( \frac{A}{n} \right)^2 \right]. \tag{21}$$

## 4 Заключение

В работе найден общий вид релятивистского порогового пересуммирующего фактора, соответствующего произвольному значению относительного орбитального момента двухкварковой системы. Для этой цели была использована формулировка квазипотенциального метода в трехмерном релятивистском конфигурационном представлении с кулоновским потенциалом. Кулоновский потенциал, заданный в этом представлении, обладает следующим свойством: его поведение соответствует статическому кварк-антикварковому потенциалу $V_{q\bar{q}} \sim \bar{\alpha}_s(Q^2)/Q^2$ с инвариантным зарядом $\bar{\alpha}_s(Q^2) \sim 1/\ln Q^2$.

Отметим два важных обстоятельства, которые связаны с релятивистскими пороговыми факторами. Общий вид релятивистского порогового фактора (21), соответствующего КХД-подобному потенциалу, воспроизводит, как известное нерелятивистское поведение, когда $v \ll 1$, так и ожидаемый предел в ультрарелятивистском случае. В ультрарелятивистском пределе, как было показано в [19], спектр кулоновской задачи исчезает, поскольку масса частицы, которой в этом пределе можно пренебречь, являлась единственным размерным параметром. Этот факт отражает существенное различие между потенциальными моделями и квантовой теорией поля, в которой появляется дополнительный размерный параметр. Следовательно, можно ожидать, что в потенциальной модели пересуммирующие факторы, соответствующие непрерывному спектру, должны обращаться в единицу в пределе $m \to 0$.

Представленная работа была выполнена совместно с И. Л. Соловцовым, но, к глубокому сожалению, из-за его неожиданной и такой не к месту, и не ко времени смерти, она публикуется в память об этом талантливом физике-теоретике, известном как в научных кругах стран бывшего СССР, так и далеко за его пределами, а для тех кто его знал, работал и дружил с ним — в память об этом оптимистичном, веселом, остроумном и просто замечательном человеке.

## Литература

[1] T. Appelquist, H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **34**, 43 (1975); Phys. Rev. D **12**, 1404 (1975).

[2] A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien **II**, Vieweg, Braunschweig, (1939).

[3] A. D. Sakharov, Sov. Phys. JETP **18**, 631 (1948).

[4] K. A. Milton, I. L. Solovtsov, Mod. Phys. Lett. A **16**, 2213 (2001).

[5] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze, Nuovo Cim. **29**, 380 (1963).

[6] V. G. Kadyshevsky, Nucl. Phys. B **6**, 125 (1968).

[7] V. G. Kadyshevsky, R. M. Mir-Kasimov, N. B. Skachkov, Nuovo Cim. A **55**, 233 (1968); ЭЧАЯ **2**, 635 (1972).

[8] V. I. Savrin, N. B. Skachkov, Lett. Nuovo Cim. **29**, 363 (1980).

[9] M. Freeman, M. D. Mateev, R. M. Mir-Kasimov, Nucl. Phys. B **12**, 197 (1969).

[10] V. N. Kapshai, N. B. Skachkov, Theor. Math. Phys. **55**, 471 (1983); E. A. Dei, V. N. Kapshai, N. B. Skachkov, Theor. Math. Phys. **69**, 997 (1986).

[11] I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova, Nonl. Phen. Complex Syst. **5**, 51 (2002).

[12] I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova, Yu. D. Chernichenko, Письма ЭЧАЯ **2**, 17 (2005); Phys. Part. Nuclei Lett. **2**, 199 (2005).

[13] R. Barbieri, P. Christillin, E. Remiddi, Phys. Rev. D **8**, 2266 (1973).

[14] K. A. Milton, I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova, Phys. Rev. D **64**, 016005 (2001); **65**, 076009 (2002).

[15] И. Л. Соловцов, О. П. Соловцова, Непертурбативное разложение в квантовой хромодинамике и некоторые его приложения. Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности. Минск, ИФ НАНБ, Выпуск 6, 140 (2005).

[16] I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova, Nuclear Science and Safety in Europe, Eds. T. Čechhák et al., Springer Publ. Co. Netherlands, 161 (2006).

[17] K. A. Milton, I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova, Mod. Phys. Lett. A **21**, 1355 (2006).

[18] N. B. Skachkov, I. L. Solovtsov, Theor. Math. Phys. **54**, 116 (1983).

[19] W. Lucha, F. F. Schöberl, Phys. Rev. Lett. **64**, 2733 (1990); Phys. Lett. B **387**, 573 (1996).