

Аналитические Расчеты Вкладов в Аномальные Магнитные Моменты Лептонов от Поляризации Вакуума Четырьмя Лептонными Петлями

В.И. Лашкевич, О.П. Соловцова*

*Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого,
пр-т Октября, 48, 246746, г. Гомель, Беларусь*

Л.П. Каптарь†

*Объединенный институт ядерных исследований,
ул. Жолио-Кюри, 6, 141980, Московская область, г. Дубна, Россия*

Исследуется явный вид электромагнитных поправок пятого порядка по постоянной тонкой структуре α к аномальным магнитным моментам лептонов a_L ($L = e, \mu$ и τ) от диаграмм со вставками поляризационного оператора из лептонных петель. Подход основывается на последовательном применении дисперсионных соотношений для поляризационного оператора и преобразования Меллина–Барнса для пропагаторов массивных частиц. Применяя подход, получены явные аналитические выражения для поправок к a_L от поляризации вакуума четырьмя одинаковыми лептонными петлями, а так же соответствующие асимптотические выражения в пределе как малых, так и больших значений отношения масс лептонов $r = m_\ell/m_L$, $r \ll 1$ и $r \rightarrow \infty$. Полученные асимптотики сравниваются с имеющими в литературе выражениями.

PACS numbers: 13.40.Em, 12.20.Ds, 14.60.Ef

Keywords: anomalous magnetic moment of leptons, Mellin-Barnes representation, Feynman diagrams, electromagnetic vacuum-polarization contributions

1. Введение

Известно, что взаимодействие лептона L с фотонами приводит к сдвигу его гиромагнитного отношения g от значения $g = 2$, предсказанной Дираком [1]. Величина такого сдвига, $a_L = (g - 2)/2 \neq 0$, служит мерой магнитного поля окружающего лептон и в литературе известна как аномальный магнитный момент лептона. Несмотря на то, что такой сдвиг чрезвычайно мал, его теоретическое и экспериментальное исследование представляет большой научный интерес, так как систематическое отклонение теоретических предсказаний от соответствующих экспериментальных измеренных величин может указать на ограничения Стандартной Модели или на наличии новой, неизвестной физики. Помимо чисто электромагнитного взаимодействия, вклад в a_L могут давать квантово-хромодинамические и электро-слабое взаимодействия (довольно детальный и полный обзор вкладов различных механизмов в a_L можно найти, например, в [2, 3]). Следует отметить, что экспериментальная точность измерения a_L электронов [4, 5] и мюонов [6] невероятно высока, что налагает соответствующие требования и на точность теоретических расчётов.

*E-mail: solovtsova@gstu.gomel.by

†E-mail: kaptari@theor.jinr.ru

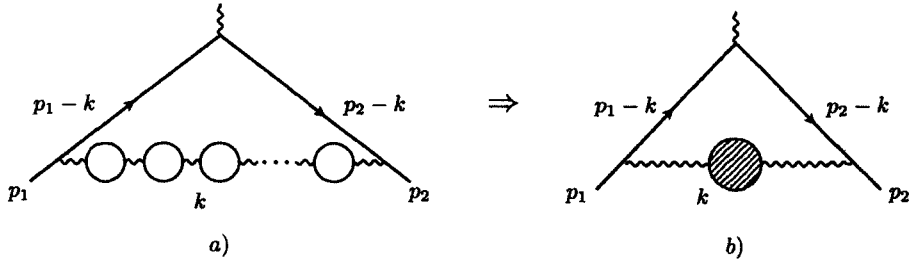


Рис. 1. Радиационные поправки к лептонной электромагнитной вершине, обусловленные вставками поляризационных операторов (а) и эквивалентная диаграмма с обменом одного массивного фотона (b).

Лидирующая поправка к аномальному магнитному моменту электрона, равная $a_e = \alpha/(2\pi^2)$, где α – постоянная тонкой структуры, впервые была вычислена Ю. Швингером [7]. Аналитические расчеты радиационных поправок к a_L в следующем за лидирующем порядке ($\sim \alpha^2$), включающие семь диаграмм потребовали довольно сложных вычислений [8, 9]. В настоящее время, как правило, окончательные численные теоретические результаты достигаются при помощи специальных алгоритмов (см., например, [10, 11]), позволяющих достичь очень высокой точности вычислений. Однако, такие расчеты требуют довольно много компьютерного времени и, кроме того, детальный анализ вклада различных механизмов в a_L затруднен. Поэтому представляется довольно привлекательными попытки выделения подкласса фейнманских диаграмм, позволяющего провести расчеты для a_L , хотя бы в низших порядках по теории возмущения, в аналитическом, замкнутом виде. К такому подклассу относятся диаграммы со вставками фотонного поляризационного оператора, состоящего только из лептонных петель, так называемые диаграммы ‘пузырькового’ типа. В работах [12] рассматривалась задача получения, основываясь на интегральном представлении Меллина–Барнса, аналитических выражений для вкладов от таких диаграмм вплоть до $\sim \alpha^5$, в виде разложений по отношению масс лептонов $r = m_\ell/m_L$, где m_L и m_ℓ обозначают массу рассматриваемого лептона и массу лептонов из поляризационного оператора, соответственно. В работе [13] подход, основывающийся на представлении Меллина–Барнса, был обобщен для аналитических вычислениях поправок a_L для любых e , μ и τ лептонов, во всем интервале отношения масс $0 < m_\ell/m_L < \infty$, и далее подход был применен для получения точных выражений до порядка α^4 .

Настоящая работа представляет собой дальнейшее развитие подхода, используемого в работе [12, 13], для нахождения в явном виде поправок к a_L от диаграмм с четырьмя внутренними петлями, сформированными одинаковыми лептонами $\ell \neq L$. До сих пор, исследования поправок α^5 от таких диаграмм проводились лишь в пределе малых отношений $r \ll 1$.

2. Основной формализм

Как известно (см. например [12–14]), вклад в a_L , обусловленный диаграммами, общий вид которых представлен на Рис. 1а, соответствует вкладу от диаграмм с обменом лишь одним, но массивным фотоном, как проиллюстрировано на Рис. 1б. Отметим, что случай с двумя различными типами лептонов в петлях мы не рассматриваем, поскольку он более сложный и требует отдельного исследования.

С учетом того, что аномальный магнитный момент лептона с вершиной $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ (см. Рис. 1а) целиком определяется магнитным моментом лептона с вершиной

$\Gamma_\mu^{(2)}(p_1, p_2, t)$ (Рис. 1b), легко получить для a_L выражение

$$a_L = \frac{1}{\pi} \int \frac{dt}{t} \text{Im} \tilde{\Pi}(t) \frac{\alpha}{\pi} \int dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)t/m_L^2} = -\frac{\alpha}{\pi} \int dx (1-x) \tilde{\Pi} \left(-\frac{x^2}{1-x} m_L^2 \right). \quad (1)$$

В принципе, уравнение (1) полностью определяет вклад в аномальный магнитный момент лептонов и может быть непосредственно применено для прямого численного расчета a_L . Однако, как было уже отмечено, цель настоящей работы состоит в нахождении аналитических выражений для поправок a_L как можно более высокого порядка по α , чтобы вычислить a_L с любой, наперед заданной, точностью. Для этого напомним, что полный поляризационный оператор, Рис. 1а, может быть записан в виде

$$\tilde{\Pi}(k^2) = \Pi(k^2) - \Pi^2(k^2) + \Pi^3(k^2) - \dots$$

Поскольку каждый член в этом выражении есть сумма операторов лептонов типа L и ℓ , выражение для поправок от диаграмм, содержащих n внутренних петель, расписывается в явном виде как произведение поляризационных операторов L и ℓ , каждый из которых, в соответствующей степени. Далее, последовательно применяя для части с лептонами ℓ , сначала дисперсионные соотношения, а затем преобразование Меллина-Барнса, получаем окончательное выражение для электромагнитных поправок от диаграмм с n замкнутыми петлями, где в поляризационном операторе j петель состоят исключительно из лептонов типа ℓ , а p – из лептонов типа L , в виде

$$a_L(p, j) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \frac{1}{2\pi i} F_{(p,j)} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \left(\frac{4m_\ell^2}{m_L^2}\right)^{-s} \Gamma(s)\Gamma(1-s) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^p \Omega_p(s) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^j R_j(s), \quad (2)$$

где $F_{(p,j)} = (-1)^{p+j+1} C_{p+j}^p$ и C_{p+j}^p обозначают биномиальные коэффициенты, а c – любое число из интервала $\alpha < \text{Re } s < \beta$, в котором подынтегральная функция непрерывна. В нашем случае, для интеграла (2), $0 < c < 1$. Меллиновские моменты $\Omega_p(s)$ и $R_j(s)$ определены как

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^p \Omega_p(s) = \int_0^1 dx x^{2s}(1-x)^{1-s} \left[\Pi^{(L)} \left(-\frac{x^2}{1-x} m_L^2 \right) \right]^p, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^j R_j(s) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{4m_\ell^2}{t}\right)^s \frac{1}{\pi} \text{Im} [\Pi^{(\ell)}(t)]^j. \quad (4)$$

Таким образом, из (2)-(4) видно, что для вычисления поправок в $a_L(p, j)$, порядка α^{p+j+1} , достаточно вычислить отдельно $\left[\Pi^{(L)} \left(-\frac{x^2}{1-x} m_L^2 \right) \right]^p$ и $[\text{Im} \Pi^{(\ell)}(t)]^j$. Явный вид операторов $\Pi^{(L)}$ и $\Pi^{(\ell)}$ в (3) и (4) хорошо известен [15]

$$\text{Re} \Pi^{(L,\ell)}(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \left[\frac{8}{9} - \frac{\delta^2}{3} + \delta \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta^2}{6} \right) \ln \frac{|1-\delta|}{1+\delta} \right], \quad (5)$$

$$\frac{1}{\pi} \text{Im} \Pi^{(L,\ell)}(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \delta \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \delta^2 \right) \theta(t - 4m_{(L,\ell)}^2), \quad \delta = \sqrt{1 - \frac{4m_{(L,\ell)}^2}{t}}. \quad (6)$$

Следует отметить, что из-за наличия θ -функции в (6), операторы $\Pi^{(L)} \left(-\frac{x^2}{1-x} m_L^2 \right)$ чисто вещественны, не зависят от лептонных масс и принимают вид

$$\Pi^{(L)} \left(-\frac{x^2}{1-x} m_L^2 \right) = \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{5}{9} + \frac{4}{3x} - \frac{4}{3x^2} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{3x^3} \right) \ln(1-x) \right]. \quad (7)$$

Далее, простой заменой переменной $t = \frac{4m_l^2}{\xi}$ в (4), можно легко показать, что и $R_j(s)$ также не зависит от масс лептонов. Таким образом, единственная зависимость аномального магнитного момента (2) от масс входит только через отношения масс внутренних и внешних лептонов

$$r = \frac{m_\ell}{m_L}. \quad (8)$$

Соответственно, в литературе общепринято классифицировать вклады в аномальный магнитный момент a_L по величине этого отношения (см., например, [2])

$$a_L = A_1 \left(\frac{m_L}{m_L} \right) + A_2 \left(\frac{m_\ell}{m_L} \right) + A_3 \left(\frac{m_{\ell_1}, m_{\ell_2}}{m_L, m_L} \right). \quad (9)$$

Здесь A_1 - это универсальный вклад, не зависящий от масс лептонов ($r = 1$). Каждое из слагаемых в сумме (12) может быть представлено в виде разложения по постоянной тонкой структуре α

$$A_1(m_L/m_L) = A_1^{(2)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^1 + A_1^{(4)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + A_1^{(6)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + \dots, \quad (10)$$

$$A_2(r) = A_2^{(4)}(r) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + A_2^{(6)}(r) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + A_2^{(8)}(r) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + A_2^{(10)}(r) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^5 + \dots, \quad (11)$$

$$A_3(r_1, r_2) = A_3^{(6)}(r_1, r_2) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + A_3^{(8)}(r_1, r_2) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + A_3^{(10)}(r_1, r_2) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^5 + \dots, \quad (12)$$

где $r_1 = m_{\ell_1}/m_L, r_2 = m_{\ell_2}$, а $m_{\ell_{1,2}}$ обозначают массы лептонов двух разных типов, отличных от L .

Коэффициенты $A_1^{(2n)}$ определяются только диаграммами с лептонными петлями, в которых лептоны того же типа, что и внешний лептон, а также диаграммами, содержащими лептонные петли и виртуальные фотоны. Эти коэффициенты называются универсальными, поскольку они не зависят от типа лептонов. Коэффициент $A_1^{(2)}$, определяющий лидирующую поправку к аномальному магнитному моменту любого лептона, - вышеупомянутый результат Ю. Швингера [7]. Следует отметить, что известны аналитические выражения для коэффициентов $A_1^{(4)}$ и $A_1^{(6)}$ (см., например, [2]). В случае, если диаграммы содержат только лептонные петли, то точные аналитические выражения для универсальных коэффициентов известны вплоть до $n = 13$ [16]. Интересно отметить, что значения этих коэффициенты до $n = 7$ падают по величине, а потом они растут, причём при $n \gg 1$ их рост факториальный (см. [16, 17]). Приведем выражение, которое нам понадобится в дальнейшем, для коэффициента поляризации вакуума четырьмя лептонными петлями

$$A_1^{(10)} = -\frac{3689383}{656100} - \frac{21928 \pi^4}{1403325} - \frac{128 \zeta(3)}{675} + \frac{64 \zeta(5)}{9} \simeq 4.7090571603. \quad (13)$$

Итак, коэффициенты разложения в (11) для вкладов от диаграмм поляризации вакуума лептонными петлями в разных порядках разложения по постоянной тонкой структуре α , полностью определяются формулами (5)-(10). Опираясь на эти формулы, получим явные аналитические выражения для коэффициента $A_2^{(10)}(r)$, ограничиваясь при этом случаем, когда все лептоны в петлях идентичны и отличны от внешнего лептона - соответствующая диаграмма приведена на Рис. 2.

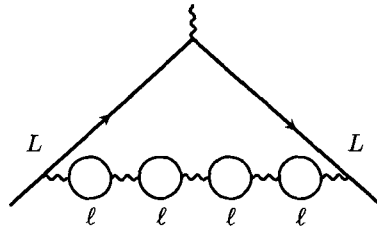


Рис. 2. Диаграмма с четырьмя замкнутыми петлями, состоящими из лептонов типа l ($l \neq L$) и дающая вклад пятого порядка по α в a_L .

3. Расчет диаграммы на Рис. 2

Для приведенной на Рис. 2 диаграммы, входящий в выражение (2) множитель $F = -1$, поскольку $p = 0$ и $j = 4$, а выражения для мелиновских моментов (3) и (4) принимают вид

$$\Omega_0(s) = \int_0^1 dx x^{2s}(1-x)^{1-s} = \frac{\Gamma(2-s)\Gamma(1+2s)}{\Gamma(3+s)}, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 R_4(s) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{4m_l^2}{t}\right)^s \frac{4}{\pi} \left\{ [\operatorname{Re}\Pi^{(\ell)}(t)]^3 \operatorname{Im}\Pi^{(\ell)}(t) - \operatorname{Re}\Pi^{(\ell)}(t) [\operatorname{Im}\Pi^{(\ell)}(t)]^3 \right\}. \quad (15)$$

Вычисления $R_4(s)$ с использованием (5)–(6), и далее подставляя $\Omega_0(s)$ и $R_4(s)$ в (2), приходим к выражению

$$a_L^{4\ell}(r) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5 \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r^{-2s} F(s) ds, \quad (16)$$

где подынтегральная функция $F(s)$ равна

$$F(s) = \left\{ \frac{Z_1(s)}{729} - (1+s)Z_2(s) \left[\frac{81\pi^2}{729} - \frac{2}{3}\psi^{(1)}(s) \right] \right\} \frac{4\pi^2(1-s)}{Y(s)\sin^2(\pi s)}. \quad (17)$$

Здесь $\psi^{(1)}(s)$ обозначает полигамма-функция первого порядка. В уравнении (17), для удобства, введены следующие обозначения

$$Z_1(s) = 1259712 + 955332s - 4110912s^2 - 6558755s^3 - 1384529s^4 + 3898617s^5 + 3867513s^6 + 1653510s^7 + 373944s^8 + 43520s^9 + 2048s^{10}, \quad (18)$$

$$Z_2(s) = -8400 - 26340s - 22144s^2 + 1641s^3 + 11729s^4 + 6894s^5 + 1835s^6 + 237s^7 + 12s^8 \quad (19)$$

$$Y(s) = s(s+1)^2(s+2)^2(3+s)(4+s)(5+s)(6+s)(1+2s)(3+2s)(5+2s)(7+2s)(20)$$

Из (17)–(20) явно видно, что подынтегральная функция $F(s)$ в уравнении (16) сингулярна в комплексной плоскости переменной s с полюсными сингулярностями различной кратности, обусловленными функциями $Y(s)$, $\psi^{(1)}(s)$ и $1/\sin^2(\pi s)$. В дальнейшем интеграл (16) считается по теореме Коши, замыкая контур интегрирования, поочередно, в правой ($r > 1$) и левой ($r < 1$) полуплоскостях.

3.1. Правая полуплоскость ($r > 1$)

В правой полуплоскости подынтегральная функция $F(s)$ имеет полюса второго порядка при всех положительных целых значениях $s = n > 1$, ($n = 2, 3, 4 \dots$) кроме точки $n = 1$, в которой полюс первого порядка. Более того, вычет $F(s = 1)$ в этой точке равен нулю. Для $n \geq 2$, в правой полуплоскости удобно представить подынтегральную функцию $r^{-2s}F(s)$ в виде

$$r^{-2s}F(s) = \frac{f(s, r)}{\sin^2(\pi s)}, \quad (21)$$

где $f(s)$ регулярна в этой области и однозначно определяется выражениями (17)-(20). Тогда, прямое вычленение вычетов (второго) порядка по стандартным правилам

$$Res \left[\frac{f(s, r)}{\sin^2(\pi s)} \right]_{s=n} = \lim_{s \rightarrow n} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{f(s, r)(s - n)^2}{\sin^2(\pi s)} \right] = \frac{1}{\pi^2} \lim_{s \rightarrow n} \left[\frac{\partial f(s, r)}{\partial s} \right] \quad (22)$$

приводит к следующему выражению для $A_2^{(10),\ell\ell\ell}(r > 1)$

$$A_2^{(10),\ell\ell\ell}(r > 1) = D_0(r) + 2D_1(r) \ln(r) + D_2(r) \left[Li_2 \left(\frac{1}{r^2} \right) - 2 \ln \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \ln(r) \right] - \frac{16}{9} \left(\frac{8r^2}{75} + 5r^4 + \frac{2\pi^2 r^4}{3} \right) \left[Li_2 \left(\frac{1}{r^2} \right) \ln(r) + Li_3 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right] + \Sigma_1(r), \quad (23)$$

где $Li_n(x)$ обозначает полилогарифмическая функция порядка n от аргумента x , а полиномы $D_{0-2}(r)$ определены следующим образом

$$D_0(r) = -\frac{14463825527}{11252115000} - \frac{143175013r^2}{14033250} + \frac{680597537r^4}{63149625} + \frac{97213348r^6}{63149625} + \frac{797842r^8}{2338875} + \frac{42952r^{10}}{1002375} + \frac{\pi^2}{2} r \left(\frac{18203}{31185} + \frac{28010r^2}{5103} - \frac{5957r^4}{2025} - \frac{12916r^6}{70875} \right) - \pi^2 \left(\frac{57419}{255150} - \frac{2878}{2679075r^2} - \frac{1251149r^2}{1559250} - \frac{249589r^4}{841995} - \frac{40591r^6}{336798} - \frac{3632r^8}{93555} - \frac{64r^{10}}{13365} \right) + 2r \left[\frac{18203}{31185} + \frac{28010r^2}{5103} - \frac{5957r^4}{2025} - \frac{12916r^6}{70875} - \pi^2 \left(\frac{18203}{748440} + \frac{2801r^2}{13608} - \frac{23r^4}{216} - \frac{7r^6}{1080} \right) \right] \times \left[Li_2 \left(\frac{1-r}{1+r} \right) - Li_2 \left(-\frac{1-r}{1+r} \right) \right] + \frac{\pi^4}{2} r \left(\frac{18203}{748440} + \frac{2801r^2}{13608} - \frac{23r^4}{216} - \frac{7r^6}{1080} \right),$$

$$D_1(r) = \frac{9239297}{26790750} + \frac{15360524r^2}{5011875} - \frac{109392281r^4}{21049875} - \frac{26671558r^6}{21049875} - \frac{2468692r^8}{7016625} - \frac{42952r^{10}}{1002375} + \pi^2 \left(\frac{25}{243} - \frac{1185953r^2}{1871100} - \frac{4624r^4}{40095} - \frac{26501r^6}{224532} - \frac{416r^8}{10395} - \frac{64r^{10}}{13365} \right),$$

$$D_2(r) = \frac{8}{175} + \frac{13664r^2}{10125} + \frac{1274r^4}{729} - \frac{1568r^6}{1215} + \frac{410r^8}{567} + \frac{42152r^{10}}{127575} + \frac{42952r^{12}}{1002375} + \pi^2 \left(\frac{2}{81} - \frac{8r^2}{27} + \frac{34r^4}{81} - \frac{64r^6}{405} + \frac{16r^8}{189} + \frac{64r^{10}}{1701} + \frac{64r^{12}}{13365} \right).$$

Последнее слагаемое в выражении (23) имеет вид

$$\Sigma_1(r) = \frac{8}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{C_1(n)}{Y(n)} \psi_n^{(1)} + (n-1)Z_2(n) (\psi_n^{(1)} \ln(r^2) - \psi_n^{(2)}) \right] \frac{r^{-2n}}{Y(n)}, \quad (24)$$

где $\psi_n^{(1,2)}$ обозначает полигамма-функции первого или второго порядка от целого аргумента $s = n$. Кроме того, в (24) введены следующее обозначение

$$C_1(n) = (n+1)^2(n+2) \left(635040000 + 7687008000n + 36734547600n^2 + 93125888040n^3 + 135651027372n^4 + 104915891978n^5 + 10006706560n^6 - 69851951805n^7 - 83164962406n^8 - 51439049641n^9 - 18649902420n^{10} - 2892341259n^{11} + 812142446n^{12} + 656337939n^{13} + 212614912n^{14} + 42833116n^{15} + 5711184n^{16} + 493456n^{17} + 25152n^{18} + 576n^{19} \right). \quad (25)$$

3.2. Левая полуплоскость ($r < 1$)

Вычисление интеграла (16) в области $r < 1$ намного сложнее по сравнению со случаем $r > 1$. Это обусловлено наличием дополнительных нулей (первого порядка) у функции $Y(s)$ при полуцелых значениях $s = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}$ и нулей первого порядка у этой функции при отрицательных n , где $0 \leq n \leq 6$. Кроме того, при отрицательном аргументе полигамма-функция $\psi^{(1)}(s)$ также имеет полюса при целых $s = -n$

$$\psi^{(1)}(s) = -\psi^{(1)}(-s) + \frac{1}{s^2} + \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi s)}, \quad (26)$$

где $\psi^{(1)}(-s)$ не имеет особенностей при положительных аргументах $-s = n$.

Все вычеты, как и в предыдущем случае, считаются по стандартным правилам вычисления в полюсах высокого порядка. В силу громоздкости выражений для соответствующих производных высокого порядка по s , все операции проводились нами на компьютере с использованием пакета символьной манипуляции Wolfram Mathematica. Результат вычислений следующий

$$A_2^{(10),\ell\ell\ell}(r < 1) = P_0(r) + 2P_1(r) \ln(r^2) + 4P_2(r) \ln^2(r) + 8P_3(r) \ln^3(r) + \frac{4}{3}K_1 \ln^4(r) - \frac{128}{135}r^4 \ln^5(r) + 2K_3 \left[\Phi \left(r^2, 4, \frac{1}{2} \right) - 2\Phi \left(r^2, 3, \frac{1}{2} \right) \ln(r) + 2\Phi \left(r^2, 2, \frac{1}{2} \right) \ln^2(r) \right] + \Sigma_2(r), \quad (27)$$

где $\Phi(r^2, n, 1/2)$ – это функции Лерха, которая связанас полилогарифмами как

$$\Phi(r^2, n, 1/2) = \frac{2^{n-1}}{r} [Li_2(r) - Li_2(-r)].$$

Для краткости записи введены полиномы $K_i(r)$ и функции $P_i(r)$:

$$K_1(r) = \frac{2}{27} - \frac{8r^2}{9} + \frac{34r^4}{27} - \frac{64r^6}{135} + \frac{16r^8}{63} + \frac{64r^{10}}{567} + \frac{64r^{12}}{4455},$$

$$K_2(r) = \frac{50}{243} - \frac{104r^2}{81} - \frac{134r^4}{81} - \frac{4432r^6}{6075} - \frac{1033r^8}{2205} - \frac{12332r^{10}}{535815} + \frac{2119877r^{12}}{46309725},$$

$$K_3(r) = \frac{18203r^2}{249480} + \frac{2801r^4}{4536} - \frac{23r^6}{6075} - \frac{7r^8}{360},$$

$$K_4(r) = -\frac{2801r^4}{567} + \frac{230r^6}{81} + \frac{1813r^8}{10125},$$

$$K_5(r) = -\frac{317}{243} + \frac{31664r^2}{10125} + \frac{167r^4}{729} - \frac{32r^6}{27} + \frac{56r^8}{81} + \frac{1640r^{10}}{5103} + \frac{3832r^{12}}{91125}.$$

В уравнении (27) обозначениям $P_i(r)$ соответствуют выражения

$$\begin{aligned} P_0(r) = & \frac{64613}{26244} - \frac{145231r^2}{17325} + \frac{265354583r^4}{7016625} + \frac{5155111r^6}{1002375} + \frac{1644584209r^8}{261954000} + \frac{262864711931r^{10}}{445583754000} \\ & - \frac{38750851857953r^{12}}{70020304200000} + \pi^2 \left(\frac{317}{1458} - \frac{380911r^2}{173250} + \frac{1224743r^4}{841995} - \frac{1473151r^6}{1559250} - \frac{9577847r^8}{61122600} \right. \\ & + \frac{283177187r^{10}}{3713197950} + \frac{55905529021r^{12}}{1283705577000} \left. \right) - \pi^2 K_1(r) \left(\text{Li}_2(r^2) - \frac{\pi^2}{5} \right) + \frac{\pi^2}{2r} (K_4(r) - \\ & - \frac{\pi^2}{3} K_3(r)) - \frac{2}{r} (K_4(r) + \pi^2 K_3(r)) \left[\text{Li}_2 \left(\frac{1-r}{1+r} \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{1-r}{1+r} \right) \right] - K_5(r) \text{Li}_2(1-r^2) \\ & - \left(\frac{100}{81} + \frac{128r^2}{675} + \frac{64r^4}{9} - \pi^2 \frac{32r^4}{9} \right) \text{Li}_3(r^2) + \left(6K_2(r) - \frac{128r^4}{675} - \pi^2 \frac{64r^4}{27} \right) \zeta(3) \\ & - 2 \left(K_1(r) + \frac{8}{27} \right) \text{Li}_4(r^2) + \frac{128}{9} r^4 (\text{Li}_5(r^2) - \zeta(5)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1(r) = & \frac{8609}{4374} - \frac{2190631r^2}{280665} - \frac{139188328r^4}{7016625} - \frac{1590044r^6}{7016625} - \frac{27882949r^8}{9355500} - \frac{1090421197r^{10}}{1768189500} \\ & + \frac{671218651r^{12}}{5051970000} + \pi^2 \left(\frac{50}{243} - \frac{50399r^2}{41580} + \frac{6431r^4}{13365} + \frac{20003r^6}{1871100} + \frac{5539r^8}{48510} - \frac{16846r^{10}}{5893965} \right. \\ & - \frac{2119877r^{12}}{92619450} \left. \right) + \left(\frac{50}{81} + \frac{64r^2}{675} + \frac{32r^4}{9} - \pi^2 \frac{16r^4}{9} \right) \text{Li}_2(r^2) - \pi^2 K_1(r) \ln(1-r^2) \\ & + 2K_1(r) \left(\text{Li}_3(r^2) + 2\zeta(3) \right) + \frac{4}{27} \text{Li}_3(r^2) - \frac{32r^4}{3} \text{Li}_4(r^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(r) = & \frac{317}{486} - \frac{247663r^2}{62370} + \frac{2139227r^4}{561330} - \frac{40591r^6}{112266} - \frac{3632r^8}{31185} - \frac{64r^{10}}{4455} \\ & + K_1(r) \left(\text{Li}_2(r^2) - \frac{\pi^2}{3} \right) + \frac{32}{9} r^4 \left(\text{Li}_3(r^2) - \zeta(3) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 = & \frac{25}{243} - \frac{231277r^2}{374220} - \frac{4624r^4}{40095} - \frac{26501r^6}{224532} - \frac{416r^8}{10395} - \frac{64r^{10}}{13365} - \pi^2 \frac{16r^4}{81} - \frac{16}{27} r^4 \text{Li}_2(r^2) \\ & - \frac{1}{3} K_1(r) \ln(1-r^2) - K_3(r) \frac{1}{3r} [\ln(1+r) - \ln(1-r)] \end{aligned}$$

где $\zeta(x)$ обозначает дзета-функцию Римана от аргумента x .

Наконец, сумма $\Sigma_2(r)$ в (27) определена как

$$\Sigma_2(r) = \frac{8}{3} \sum_{n=7}^{\infty} \left[\frac{C_1(-n)}{Y(-n)} \psi_n^{(1)} + (n^2 - 1) Z_2(-n) (\psi_n^{(1)} \ln(t) + \psi_n^{(2)}) \right] \frac{r^{2n}}{Y(-n)}, \quad (28)$$

где обозначения те же, что и в сумме (24).

4. Численные результаты

Приведенные выше выражения (23)–(27) определяют в явном виде точные формулы для вычисления поправок десятого порядка от ‘пузырьковых’ диаграмм с четырьмя одинаковыми внутренними петлями. Несмотря на громоздкий вид этих выражений, они позволяют провести численные расчеты с любой наперед заданной точностью. Требуемая же точность вычислений связана с ограниченностью точности физических значений α , m_ℓ и m_L .

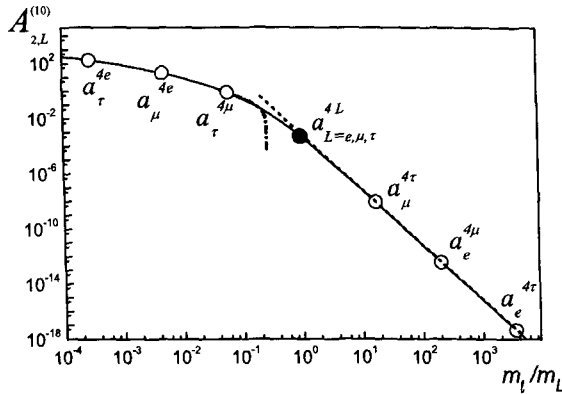


Рис. 3. Коэффициент $A_2^{(10),\ell\ell\ell\ell}(r)$ для поправки $a_L^{4\ell}$ в выражении (16). Сплошная кривая – это расчет по формуле (27) при $r < 1$ и по (23) при $r > 1$. Штрих-пунктирная линия соответствует разложению при $r \ll 1$, а пунктирная при $r \gg 1$. Кружочками обозначены значения коэффициентов для реальных лептонов: на то, какой комбинации из лептонов кружочек соответствует, указывает рядом стоящее $a_L^{4\ell}$.

На Рис. 3 приведен результат численного расчета $a_L^{4\ell}$ как функция r , где r принимает все значения $0 < r < \infty$ (сплошная кривая). Кружочками обозначены значения r для реальных физических лептонов для всех их возможных комбинациях внутренних ℓ и внешних L . Из рисунка видно, что коэффициент $A_2^{(10),\ell\ell\ell\ell}(r = 1)$ совпадает с (13). Также видно, что основной вклад в $a_L^{4\ell}$ дают диаграммы со вставками с легчайшими лептонами ℓ , т.е. диаграммы, для которых $r < 1$. С увеличением масс m_ℓ и m_L вклады диаграмм с $r > 1$ сильно подавлены, от 12 до 20 порядков величины по сравнению с $r < 1$. Более того, легко заметить, что вклад в аномальный магнитный момент существенно определяется только диаграммами с электронными петлями, т.е., диаграммами типа $a_e^{4\ell}$.

Разложим полученные выражения (23)–(27) в ряд Тейлора вблизи $r \rightarrow 0$ и $r \gg 1$ и сравним с опубликованными разложениями [12, 18]. При $r \gg 1$ из выражений

(23)–(24) следует разложение

$$A_2^{(10)}(r \gg 1) = \left(-\frac{369904}{88409475} + \frac{4402}{109147} \zeta(3) \right) \frac{1}{r^4} - \left(\frac{598587203}{82751268600} - \frac{71960}{127702575} \zeta(3) \right) \frac{1}{r^6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^8}\right). \quad (29)$$

Как видно из Рис. 3, это выражение является хорошим приближением при $2 < r < \infty$.

При $r \ll 1$ из (27) получаем выражение, которое аналогично, полученному в ранее в работе [12]. Внимательное сравнение указывает на полное совпадение этих выражений, за исключением двух слагаемых, а именно, при слагаемом $-\frac{32}{27}r^2 \ln^4(r)$ отличаются знаки, а фактор $-\frac{61}{27}\pi^2\zeta(3)r^4$ в [12] выглядит как $-\frac{64}{27}\pi^2\zeta(3)r^4$. Видимо, в [12] имеются опечатки. Что касается сравнения с работой [18], то имеется полное совпадение, однако в этой работе приведено мало членов разложения, до порядка $\mathcal{O}(r^2 \ln^4(r))$.

5. Заключение

В данной работе впервые получены точные аналитические выражения для поправок десятого порядка к аномальному магнитному моменту лептона (e , μ и τ) от фейнмановских диаграмм со вставками поляризационного оператора, состоящего из четырех одинаковых лептонных петель. Рассмотренные диаграммы включают все возможные комбинации исследуемого лептона L с внутренними лептонами ℓ составляющие петли. Подход основан на интегральном представлении Меллина-Барнса, которое позволяет получить аналитические выражения для соответствующих поправок во всем диапазоне изменения отношения r массы лептона в петле к массе внешнего лептона $0 < r = \frac{m_\ell}{m_L} < \infty$. Приводятся результаты численных расчетов поправок во всем интервале r и анализируются относительные вклады различных диаграмм в аномальный магнитный момент конкретного лептона. Показано, что основной вклад дают диаграммы с четырьмя элетронными петлями.

Получены приближенные выражения в пределе $r \ll 1$ и $r \gg 1$. Исследованы область применения таких разложений и сравниваются с известными в литературе результатами.

Проведенные исследования в большой степени поддержаны грантом сотрудничества Беларусь-ОИЯИ.

References

- [1] Dirac P. A. M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1927, vol.117, pp. 610 - 624. <https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0023>
- [2] Jegerlehner F. The anomalous magnetic moment of the muon. *Springer Tracts in Modern Physics Springer International Publishing AG*. - 2017. - 693 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-63577-4>
- [3] Aoyama T., Asmussen N., Benayoun M., Bijnens J., Blum T., Bruno M. [et al.] The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model. *Physics Reports*, 2020, vol. 887, pp. 1-166. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2020.07.006>

- [4] Parker R. H., Chenghui Y., Zhong W., Estey B., M?ller H. Measurement of the fine-structure constant as a test of the Standard Model. *Science*, 2018, vol. 360, no. 6385, pp. 191-195. <https://doi.org/10.1126/science.aap7706>
- [5] Morel L., Yao Z., Clad P., Guellati-Khelifa S. Determination of the fine-structure constant with an accuracy of 81 parts per trillion. *Nature*, 2020, vol. 588, pp. 61-65. <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2964-7>
- [6] Abi B., Albahri T., Al-Kilani S., Allspach D., Alonzi L. P. [et al.]. (Muon g-2 Coll.) Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm. *Physical Review Letter*, 2021, vol. 126, - art. 141801, 11 p. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.126.141801>
- [7] Schwinger J. S. Quantum electrodynamics. III: The electromagnetic properties of the electron: radiative corrections to scattering. *Physical Review*, 1949, vol. 76, pp. 790-817. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.790>
- [8] Petermann A. Fourth order magnetic moment of the electron. *Helvetica Physica Acta*, 1957, vol. 30, pp. 407-408. <https://doi.org/10.5169/seals-112823>
- [9] Sommerfield C. M. Magnetic dipole moment of the electron. *Physical Review*, 1957, vol. 107, pp. 328 - 329. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.107.328>
- [10] Laporta S. The analytical contribution of some eighth order graphs containing vacuum polarization insertions to the muon ($g - 2$) in QED. *Physics Letters B*, 1993, vol. 312, pp. 495 - 500. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(93\)90988-T](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)90988-T)
- [11] Laporta S. High-precision calculation of the 4-loop contribution to the electron $g-2$ in QED. *Physics Letters B*, 2017, vol. 772, pp. 232-238. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.06.056>
- [12] Aguilar J. P., Greynat D., Rafael E. Muon anomaly from lepton vacuum polarization and the Mellin-Barnes representation. *Physical Review D*, 2008, vol. 77, art. 093010, 27 p. <https://doi.org/10.48550/arXiv.0802.2618>
- [13] Solovtsova O. P., Lashkevich V. I., Kaptari L. P. Lepton anomaly from QED diagrams with vacuum polarization insertions within the Mellin-Barnes representation.
- [14] Lautrup B. E. On high order estimates in QED. *Physical Letter B*, 1977, vol. 69, pp. 109 - 111. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90145-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90145-9)
- [15] Lautrup B. E., Rafael E. Calculation of the sixth-order contribution from the fourth-order vacuum polarization to the difference of the anomalous magnetic moments of muon and electron. *Physical Review*, 1968, vol. 174, pp. 1835-1842. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.174.1835>
- [16] Laursen M. L., Samuel M. A. The n -bubble diagram contribution to $g-2$. *Journal of Mathematical Physics*, 1981, vol. 22, pp. 1114-1126.
- [17] Лашкевич В. И., Соловцова О. П., Теряев О. В. О вкладах высших порядков в аномальные магнитные моменты лептонов от поляризации вакуума лептонными петлями. *Вестці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*, 2022, т. 58, № 4, с. 412-423. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-412-423>
- [18] Laporta S. Analytical and numerical contributions of some tenth-order graphs containing vacuum polarization insertions to the muon ($g - 2$) in QED. *Physics Letters B*, 1994, vol. 328, pp. 522-527. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(94\)91513-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(94)91513-X)