

Академик В. В. ШУЛЕЙКИН

ПРОФИЛЬ И ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ВЕТРОВОЙ ВОЛНЫ

Стереофотосъемка морских волн, произведенная многочисленными авторами, давно обнаружила, что профиль ветровых волн весьма резко отличается от трохойды: вершины волн оказываются более заостренными, чем вершины этой кривой (при соответствующей высоте), а впадины — более пологими. Фотографирование и киносъемка волн в нашем штормовом бассейне позволили не только подробно и точно изучить профиль волн, но и обнаружить совершенно определенные закономерности его изменения. Оказалось возможным найти общие уравнения семейства кривых, к которому принадлежат наблюдаемые профили ветровых волн и к которому — в качестве частного вида — принадлежат трохойды, характерные для профиля мертвой зыби.

Пусть высота ветровой волны равна h , а ее длина λ . Направим ось X координатной системы вдоль прямой, проходящей через середины высот волн в направлении движения волн. Ось Y направим вертикально вверх. Волны будем считать двумерными (плоская задача).

Как известно, трохойду можно представить в параметрической форме двумя уравнениями, в которые входят: радиус производящей окружности $r_0 = \frac{1}{2}h$, радиус «круга качения» R и угол θ , являющийся функцией времени. В свою очередь, $R = \lambda/2\pi$. Общие уравнения семейства записываются в схожем виде:

$$x = R\theta + a \sin \theta, \quad y = b \cos \theta. \quad (1)$$

Здесь R сохраняет прежнее выражение через λ , а вместо r_0 в первое уравнение вошел новый параметр a и во второе уравнение — новый параметр b .

По уравнениям (1) легко построить профиль ветровой волны, если заданы параметры a и b : можно вычертить эллипс с полуосями a (большая — горизонтальная) и b (малая — вертикальная), разметить на нем точки, соответствующие различным значениям θ , перемещать центр эллипса вдоль оси X на отрезки, равные $R\theta$, и отмечать на неподвижном листе бумаги соответствующие положения точки, движущейся по эллипсу. Легко убедиться в том, что при правильном выборе значений параметров a и b полученная кривая изобразит типичный профиль ветровой волны, соответствующий этим значениям параметров.

На рис. 1 изображен один из профилей, полученных нами посредством киносъемки при опытах в бассейне. Вершины волн здесь отсекают на оси отрезки AB , которые значительно короче отрезков BC , отсекаемых подошвами волн. Исходя из способа построения профиля, легко показать, что $AB = \lambda/2 - 2a$; $BC = \lambda/2 + 2a$.

Обозначим отношение AB к BC через κ . Тогда окажется, что по

фотографии профиля можно определить оба параметра: a и b , зная κ , высоту волн h и длину λ . Именно:

$$a = \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} \frac{\lambda}{4}, \quad b = \frac{h}{2}. \quad (2)$$

Определив по (2) оба параметра и проделав описанное построение для целой серии профилей, мы получили хорошее совпадение с профилями, зафиксированными на кадрах киносъемки. Любопытно, что

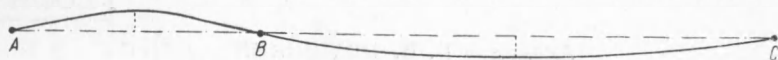


Рис. 1

предлагаемые параметры пригодны даже для характеристики «предельно крутой» волны, в свое время описанной Мичеллом, — разумеется, лишь в некотором приближении. Для такой волны измерения дают

$$\kappa = 0,38; \quad \frac{a}{\lambda} = 0,112; \quad \frac{b}{\lambda} = 0,0715.$$

На рис. 2 пунктиром вычерчен профиль предельно крутой волны, а сплошной линией — профиль, построенный по нашему способу. Небольшие расхождения заметны только у самой вершины волны.

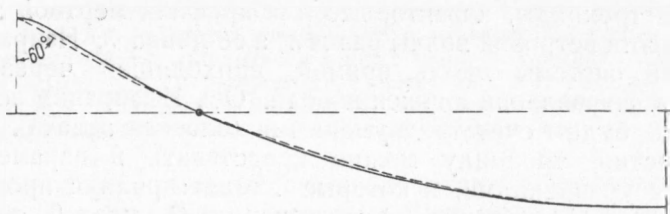


Рис. 2

Уравнения (1) позволяют найти на профиле точки, в которых крутизна склона волны достигает максимума, — это точки, в которых вторая производная от y по x обращается в нуль. Простые выкладки показывают, что в этих точках касательная к профилю волны составляет с вертикальной осью угол γ_0 , определяемый из соотношения:

$$\operatorname{tg} \gamma_0 = \sqrt{\left(\frac{R}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}. \quad (3)$$

Это соотношение тоже хорошо подтверждается результатами непосредственных измерений на кинокадрах. Для предельно крутой волны оно дает совсем небольшое расхождение с хорошо известной теорией. Именно, по (3) оказывается, что в данном случае $\gamma_0 = 58^\circ$, т. е. угол при вершине сплошной кривой (на рис. 2) $2\gamma_0 = 116^\circ$. Как известно, в действительности угол при вершине предельно крутой волны составляет 120° . Различие между этими величинами равно всего лишь 3%. Оно вызвано упомянутыми расхождениями кривых.

Так определяются очертания волны после измерения отрезков AB , BC на снимке и вычисления κ . Столь же легко проследить за изменениями характеристической величины κ в пределах семейства кривых, в зависимости от различия, существующего между a и b . Действительно,

обозначив величину b/a через n , а величину λ/h через N , получим после элементарных преобразований (2):

$$\kappa = \frac{Nn - 2}{Nn + 2}. \quad (4)$$

Это соотношение позволяет судить о степени «заострения вершин» волн, профиль которых принадлежит к исследуемому семейству. В частности, при $n = 1$ выражение (4) дает значение κ для трохойды. В пределе, при $N = \infty$, κ обращается в единицу, как и следовало ожидать в случае синусоидальной волны, у которой h бесконечно мало по сравнению с λ . Не следует забывать, что эллипс с полуосями a и b нами использован только для построения профиля ветровой волны: он не имеет ничего общего с траекторией какой-либо определенной частицы воды на поверхности волны. Наши наблюдения в бассейне показали, что сами траектории частиц воды на волне свидетельствуют о сложении двух движений частицы: поступательного, обусловленного наличием ветрового течения*, и движения по почти круговой орбите. Орбита начинает заметно отличаться от окружности только при весьма малых значениях отношения глубины водяного слоя к длине волны. Допустим, что орбиты поверхностных частиц — точные окружности, центры которых последовательно смещаются со скоростью волн c в направлении распространения волн. Тогда в некоторый момент времени t , после принятого за начало отсчета времени, центр орбиты O окажется на расстоянии x от начала координат; при этом, очевидно, $x = ct$.

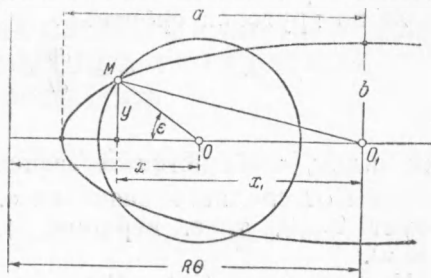


Рис. 3

Пусть в рассматриваемый момент радиус орбиты OM окажется в положении, изображенном на рис. 3: он составляет здесь угол ε с осью координат X . Как всегда, длина этого радиуса равна $h/2$. Описывая движение частицы M с формальной стороны, мы можем снова применить наши рабочие формулы (1). Тогда придется найти такой эллипс с полуосями a и b с центром в точке O_1 , по которому будет двигаться та же водная частица M , в соответствии с кинематическими условиями (1). Разумеется, при этом будет $b = h/2$. Следовательно, малая полуось вспомогательного эллипса b должна равняться радиусу OM действительной орбиты частицы.

Обозначим через x_1 проекцию радиуса-вектора O_1M вспомогательного эллипса на горизонтальную ось и через y — расстояние точки M от этой оси по вертикальному направлению. Тогда можно будет записать:

$$x_1 = a \sin \theta, \quad y = b \cos \theta. \quad (5)$$

С другой стороны, на основании (1) расстояние от O_1 до начала координат равно $R\theta$. Кроме того, на основании рис. 3,

$$\sin \varepsilon = \frac{y}{b}. \quad (6)$$

Значит, в соответствии со вторым уравнением системы (5),

$$\sin \varepsilon = \cos \theta, \quad \varepsilon = \frac{\pi}{2} - \theta. \quad (7)$$

* Здесь же учитывается известный перенос масс при волнении, обладающем потенциалом скоростей.

Приняв во внимание эти простые соотношения, выразим координату x центра действительной круговой орбиты O :

$$\begin{aligned} ct = x &= R\theta - (x_1 - b \cos \varepsilon) = R\theta - (a \sin \theta - b \sin \theta), \\ ct &= R\theta - (a - b) \sin \theta. \end{aligned} \quad (8)$$

Разделим обе части (8) на R и учтем, что $c/R = 2\pi/T = \bar{\omega}$, где через $\bar{\omega}$ обозначена некоторая средняя угловая скорость движения частицы по круговой орбите, вычисленная за период T . Тогда окажется, что

$$\theta - \frac{a-b}{R} \sin \theta = \bar{\omega} t. \quad (9)$$

Отсюда определится истинная угловая скорость ω движения частицы M по круговой орбите:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\bar{\omega}}{1 - \frac{a-b}{R} \cos \theta}. \quad (10)$$

Как видим, ω меняется в зависимости от фазы θ , колеблясь в обе стороны от среднего значения $\bar{\omega}$. Наибольшее значение ω соответствует $\theta = 0$, т. е. вершине волны, наименьшее — подошве волны ($\theta = \pi$).

На основании (10) легко определить, во сколько раз наибольшая угловая скорость превышает наименьшую:

$$\frac{\omega_{\text{макс}}}{\omega_{\text{мин}}} = \frac{1 + \frac{a-b}{R}}{1 - \frac{a-b}{R}}. \quad (11)$$

Итак, заостренная форма вершин и пологая форма подошв ветровой волны вызваны непостоянством угловой скорости движения водной частицы по ее орбите. Непосредственные измерения, проделанные нами в бассейне, подтвердили этот вывод. В качестве иллюстрации к сказанному отметим что величина $\omega_{\text{макс}}/\omega_{\text{мин}}$ при этом иногда превышала 2,5 в случаях ветровой волны. Напротив, вскоре после прекращения работы ветра эта величина быстро падала до 1,5 и ниже.

Морской гидрофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
15 IX 1953