Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 2

ГЕОФИЗИКА

А. С. МОНИН и А. М. ОБУХОВ

БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 IX 1953)

Температурная неоднородность атмосферы существенно влияет на характеристики турбулентного обмена. В работах А. М. Обухова [1] и А. С. Монина [2] была сделана попытка исследования влияния стратификации на режим турбулентности на основе методов теории подобия. В настоящей заметке методы теории подобия применены к анализу эмпирических данных о распределении температуры и ветра в приземном слое атмосферы.

При анализе турбулентного режима в приземном слое воздуха над однородной поверхностью можно пренебречь действием силы Кориолиса, влиянием молекулярной вязкости и теплопроводности и учитывать малые изменения плотности, обусловленные изменением лишь температуры, но не давления. Изменения температуры предполагаются малыми по сравнению со средней абсолютной температурой среды T_0. При этих упрощениях основные уравнения содержат лишь одну размерную константу g / T_0 (g — ускорение силы тяжести), отражающую влияние архимедовых сил.

Пограничный слой можно характеризовать условиями постоянства (независимость от z) турбулентного трения:

$$\tau = -\rho\overline{u'w'} = \mathrm{const} \tag{1}$$

и турбулентного потока тепла:

$$q = c_p\,\rho\overline{T'w'} = \mathrm{const}, \tag{2}$$

где ρ — плотность воздуха; c_p — удельная теплоемкость; u', w', T' — пульсации, соответственно, горизонтальной и вертикальной составляющих скорости ветра и температуры. Условия (1) и (2) могут быть получены из осредненных уравнений гидродинамики в предположении квазистационарности режима. В силу постоянства τ и q их естественно принять в качестве основных внешних параметров, определяющих турбулентный режим в каждом конкретном случае. Вместо τ и q удобно пользоваться эквивалентными величинами:

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \mathrm{const}, \tag{3}$$

$$\frac{q}{c_p\rho} = \mathrm{const}. \tag{4}$$

Составив из внешних параметров v_* и $/ c_p\rho$ вместе с основной размерной константой g / T_0 характерные масштабы скорости, температуры и высоты, мы можем представить зависимость средней скорости потока $v(z)$ и температуры $T(z)$ от высоты в форме:

$$v(z_2) - v(z_1) = \frac{v_*}{\varkappa}\left[f_1\left(\frac{z_2}{L}\right) - f_1\left(\frac{z_1}{L}\right)\right], \tag{5}$$

$$T(z_2) - T(z_1) = -\frac{q}{\varkappa v_* c_p\rho}\left[f_2\left(\frac{z_2}{L}\right) - f_2\left(\frac{z_1}{L}\right)\right], \tag{6}$$

где z_2 и z_1 — высоты произвольных двух уровней, лежащих выше слоя шероховатости $(z_2 > z_1 \gg h_0)$*, L — характерный масштаб высоты, однозначно определяемый из соображения размерности:

$$L = -\frac{v_*^2}{\varkappa \frac{g}{T_0} \frac{q}{c_p \rho}}. \tag{7}$$

В формулах (5), (6) и (7) для удобства введен числовой множитель $\varkappa$ — постоянная Кармана. Значения $L > 0$ соответствуют условиям устойчивой стратификации ($q < 0$, тепловой поток направлен вниз), значения $L > 0$ соответствуют неустойчивой стратификации ($q > 0$). Можно формально определить коэффициент обмена для количества движения K и коэффициент турбулентной температуропроводности K_T, полагая:

$$K = \frac{\tau}{\rho\, dv / dz} = \frac{\varkappa v_* L}{f_1'(z / L)},$$

$$K_T = -\frac{q}{c_p \rho\, dT / dz} = \frac{\varkappa v_* L}{f_2'(z / L)}.$$

Предположим, что турбулентное число Прандтля $K_T / K = \alpha = \text{const}$. Практически α близко к единице, и мы можем приближенно положить $K_T = K$**. Отсюда следует, что $f_1'(\zeta) = f_2'(\zeta)$ и $f_1(\zeta) = f_2(\zeta)$, т. е. мы, по существу, имеем дело с одной универсальной функцией, подлежащей определению из совокупности наблюдений, проведенных при различных условиях. Некоторые свойства этой функции могут быть получены из общих соображений. При $q \to 0$ $(L \to \infty)$ мы приближаемся к условиям безразличной стратификации, для которых справедлив известный логарифмический закон Кармана:

$$v(z_2) - v(z_1) = \frac{v_*}{r} \ln \frac{z_2}{z_1}; \tag{8}$$

отсюда следует, что при $\zeta \to 0$ $f(\zeta) = \ln \zeta + O(\zeta)$. Допуская, что для $f(\zeta)$ возможно разложение $f(\zeta) = \ln \zeta$ при $|z / L| < 1$, получаем приближенно:

$$v(z_2) - v(z_1) \approx \frac{v_*}{\varkappa} \left(\ln \frac{z_2}{z_1} + \beta \frac{z_2 - z_1}{L} \right), \tag{9}$$

$$T(z_2) - T(z_1) \approx -\frac{\rho}{\varkappa v_* c_p \rho} \left(\ln \frac{z_2}{z_1} + \beta \frac{z_2 - z_1}{L} \right). \tag{10}$$

Коэффициенты в формулах (9) и (10) можно определить по эмпирическим данным, аппроксимируя данные наблюдений о ветре и температуре формулами вида:

$$v(z) = v_1 \ln \frac{z}{H} + v_2 \frac{z - H}{H} + v(H), \tag{11}$$

$$T(z) = T_1 \ln \frac{z}{H} + T_2 \frac{z - H}{H} + T(H), \tag{12}$$

где H — некоторая средняя высота наблюдений. Обработка материа-

---

* Удобно пользоваться разностями значений скорости потока и температуры, а не самими значениями v и T, так как последние должны содержать в явной форме зависимость от условий на поверхности (шероховатость, характеристики теплового контакта). «Универсальные» функции $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$ $(\zeta = z / L)$ определены с точностью до аддитивной константы.

** Случай $\alpha \neq 1$ может быть приведен к рассматриваемому изменением масштаба для температуры.

лов наблюдений двух экспедиций Главной геофизической обсерватории [3,4] дала близкие значения для числовой константы $\beta \approx 0{,}6$. Определяя из наблюдений в нижней части приземного слоя v_1 и T_1, можно в каждом отдельном случае рассчитать основные характеристики v_*, q и масштаб L:

$$v_* = \varkappa v_1, \quad q = -\varkappa^2 c_p \rho v_1 T_1, \quad L = \frac{v_1^2}{\frac{g}{T_0} T_1}.$$

С целью определения универсальной функции $f(\zeta)$ нами были обработаны данные градиентных измерений (ветер, температура), полу-

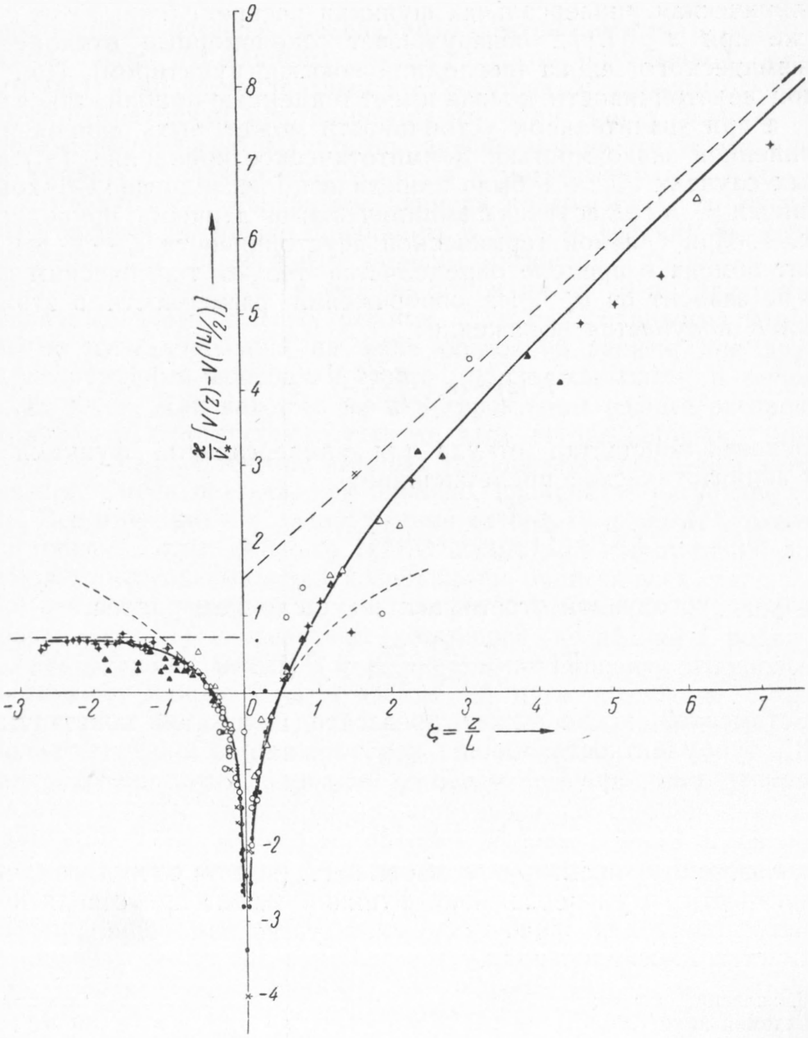

Рис. 1

ченные в экспедициях Главной геофизической обсерватории 1945, 1947 и 1950 гг. [3–5] и в экспедиции Геофизического института АН СССР 1951 г. В каждом отдельном случае определялись величины v_1 и T_1 (по измерениям в нижних 4 метрах) при помощи аппроксимации профилей в нижних 4 метрах формулами типа (9) и (10) с $\beta = 0{,}6$ и одновременно вычислялось L. Затем все данные о распределении ветра были разбиты на две группы — случаи с устойчивой и неустойчивой стратификацией ($L > 0$ и $L < 0$) — и нанесены на общий график в специальных безразмерных координатах. В качестве «начальной высоты» выбрана высота $z_1 = |L| / 2$. Безразмерные разности скоростей $\frac{\varkappa}{v_*} [v(z_2) - v(z_1)]$ отложены как функции безразмерной высоты. Правая часть графика (см. рис. 1) соответствует функции $f(\zeta) - f(1/2)$ (устойчивая стратификация, $\zeta > 0$), левая часть графика ($\zeta < 0$) — функции $f(\zeta) - f(-1/2)$. Принимая во внимание ограниченную точность наблюдений и то обстоятельство, что в одном графике удалось обобщить данные четырех экспедиций, полученные в совершенно различных условиях, можно считать согласие с гипотезой о существовании универсальной зависимости (5) вполне удовлетворительным.

Эмпирическая универсальная функция распределения ветра с высотой уже при $z > |L| / 2$ обнаруживает закономерные отклонения от логарифмического закона (последний показан пунктиром). При очень большой неустойчивости кривая имеет тенденцию приближаться к константе, а при значительной устойчивости может быть аппроксимирована линейной зависимостью. Асимптотическое поведение $f(\zeta)$ в предельных случаях $|\zeta| \gg 1$ было теоретически исследовано Обуховым [1] и Мониным [2] и согласуется с эмпирическими данными, приведенными на рис. 1. При сильной термической неустойчивости ($\zeta \to -\infty$) коэффициент обмена в пределе определяется только термическим фактором и не зависит от v_* *. Из соображений размерности в этом случае для K получается выражение:

$$K(z) \sim c \left(\frac{g}{T_0} \frac{q}{c_p \rho} \right)^{1/3} z^{4/3}$$

(c — числовая константа), откуда для универсальной функции получается асимптотическое представление:

$$f(\zeta) \approx f(-\infty) - c_1 |\zeta|^{-1/3}, \qquad c_1 = \frac{3}{c}.$$

В случае устойчивой стратификации число Ричардсона

$$\mathrm{Ri} = \frac{g}{T_0} \frac{dT / dz}{(dv / dz)^2} = f'(\zeta) > 0$$

растет с высотой, но не может превзойти некоторой константы (при $\mathrm{Ri} > \mathrm{Ri}_{\text{кр}}$ турбулентность вообще невозможна).

Следовательно, при $\zeta \to \infty$ $\mathrm{Ri}(\zeta) \to c_2$ и

$$f(\zeta) \approx c_2 \zeta + \text{const}.$$

Использование характерного масштаба L (высота слоя динамической турбулентности) и универсальных функций может представлять практический интерес для обработки градиентных измерений при микроклиматических исследованиях.

Геофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
19 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Обухов, Тр. ИТГ АН СССР, № 1 (1946). [2] А. С. Монин, Информационный сборник ГУГМС, § 1 (1950). [3] С. А. Сапожникова, Тр. НИУ ГУГМС, в. 39 (1947). [4] Л. Ф. Щербакова, Тр. ГГО, в. 16 (78) (1949). [5] Л. Ф. Щербакова, Тр. ГГО, в. 29 (91) (1952). [6] Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ, 7, в. 12 (1937).

* При $\zeta \to -\infty$ мы приближаемся к условиям свободной конвекции, возможной и при отсутствии градиента средней скорости ($v_* = 0$). Случай автомодельной свободной конвекции был исследован Я. Б. Зельдовичем [6].