Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 3

ГЕОФИЗИКА

Академик В. В. ШУЛЕЙКИН

РАЗРУШЕНИЕ ВОЛН ПОД ДЕЙСТВИЕМ МЕЛКОВОДЬЯ

Влияние мелководья было первоначально исследовано применительно к чрезвычайно длинным — приливным — волнам. Из уравнений гидродинамики было выведено приближенное уравнение профиля приливной волны, искаженного под воздействием мелководья, и был найден приближенный закон нарастания второго гармонического по мере распространения волн в мелководном районе моря. Напомним, что появление второго обертона здесь предрешается в связи с двумя обстоятельствами: во-первых, в уравнениях Эйлера учитывается конвективный член типа $u\frac{\partial u}{\partial x}$, который всегда отбрасывается при исследовании волн малой амплитуды; во-вторых, условие неразрывности пишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(H+\eta)\,u\right] = -\frac{\partial \eta}{\partial t}\,. \tag{1}$$

Иными словами, здесь учитывается, что в момент подъема уровня воды на η выше положения покоя глубина моря становится равной $H+\eta$, а при опускании уровня моря на η глубина уменьшается до $H-\eta$.

Даже в применении к теории приливной волны существующие формулы следует рассматривать как грубо-приближенные, поскольку они не только не учитывают появление и нарастание обертонов выше второго, но даже не учитывают неизбежное уменьшение амплитуды основного колебания при передаче части энергии обертонам.

Совсем незаконными являются рассуждения Джефриса ([1]), автоматически распространившего такое грубо-приближенное исследование на поверхностные волны и попытавшегося подобным образом выяснить условия разрушения волн на мелководье. Этот автор совершенно произвольно полагает, что поверхностные волны разрушаются в тот момент, когда амплитуда второго обертона становится равной амплитуде основного синусоидального колебания. При таком ничем не оправданном условии оказывается, что разрушение волн якобы должно произойти тогда, когда волны пройдут в мелководном районе расстояние x_D, определяемое следующим образом:

$$\frac{x_D}{\lambda} = \frac{4}{3\pi}\,\frac{c^2}{gh}\,. \tag{2}$$

Здесь λ обозначает длину волн, c — их скорость распространения, g — ускорение в поле тяжести, h — высоту волн.

По формуле (2) цитированного автора выходит, что даже в неограниченно глубоком море волны должны неминуемо разрушаться, пробежав расстояние, на котором укладывается небольшое число волн: ведь в (2) вообще никак не входит глубина моря, если она достаточно велика по сравнению с длиной волны λ. Не лучше ведет себя (2) и в случае четко выраженного мелководья: никакие наблюдения над профилем волн не подтверждают предположение о том, что волна разрушается, когда амплитуда второго обертона становится хотя бы приблизительно равной амплитуде основной волны. Напротив, наблюдения, произведенные в нашем бассейне, показывают, что профиль волн, долго бежавших на мелководье, может быть описан лишь рядом, содержащим множество обертонов. Волны разрушаются несравненно позже, чем требует (2). Непосредственно перед разрушением, передний склон волн нередко бывает совершенно отвесным на некотором участке. Это обстоятельство создается благодаря наложению обертонов весьма высоких порядков.

Для определения профиля разрушающейся волны мы не пошли по пути многократного интегрирования уравнений гидродинамики, с последовательной подстановкой все новых и новых членов ряда. Помимо чрезвычайно громоздких выкладок пришлось бы вносить еще более громоздкие дополнительные условия, которые не учитывались никем из предшествовавших авторов: условия, вытекающие из закона сохранения полной энергии всей системы обертонов и основных волн. Более естественным нам кажется иной путь: путь приближенного решения задачи, оправданный теми **физическими** соображениями, которые основаны на сути уравнения неразрывности (1). Действительно, применительно к волнам конечной амплитуды, соизмеримой с глубиной моря, совершенно фиктивным и формальным является представление о какой-то «средней» глубине моря, которая якобы определяет собой единую фазовую скорость во всех фазах. И уравнение (1), и грубо-приближенные исследования волн, искаженных вторым обертоном, показывают, что **фазовая скорость должна зависеть от фазы**. Она должна достигать наибольшей величины c_1 у вершины волны и наименьшей величины c_2 у подошвы. С точностью до малых первого порядка можно положить, что

$$c_1^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\,\mathrm{th}\,\alpha_1; \qquad c_2^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\,\mathrm{th}\,\alpha_2, \tag{3}$$

причем $\alpha_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\left(H + \frac{h}{2}\right)$; $\alpha_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\left(H - \frac{h}{2}\right)$; H — глубина моря; h — высота волн.

Отсюда вытекает:

$$(c_1 + c_2)(c_1 - c_2) = \frac{g\lambda}{2\pi}(\mathrm{th}\,\alpha_2 - \mathrm{th}\,\alpha_2) = \frac{g\lambda}{2\pi}\,\frac{\mathrm{sh}\,(\alpha_1 - \alpha_2)}{\mathrm{ch}\,\alpha_1\,\mathrm{ch}\,\alpha_2}. \tag{4}$$

Ввиду малого различия величин α_1 и α_2, а также c_1 и c_2 здесь можно положить с достаточным приближением

$$c_1 + c_2 = 2c_0 = 2\left(\frac{g\lambda}{2\pi}\,\mathrm{th}\,\alpha_0\right)^{1/2}; \qquad \mathrm{ch}\,\alpha_1\,\mathrm{ch}\,\alpha_2 = \mathrm{ch}^2\,\alpha_0.$$

$$\mathrm{sh}\,(\alpha_1 - \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2; \qquad \frac{\lambda}{c_0} = T; \qquad 2\pi\frac{H}{\lambda} = \alpha_0. \tag{5}$$

С другой стороны,

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\left(H + \frac{h}{2}\right) - \frac{2\pi}{\lambda}\left(H - \frac{h}{2}\right) = 2\pi\frac{h}{\lambda}.$$

Значит, после элементарных преобразований, можно записать:

$$(c_1 - c_2)\,T = \frac{2\pi h}{\mathrm{sh}\,2\alpha_0}. \tag{6}$$

Левая часть (6) выражает собой отрезок, на который смещается вперед вершина искажающейся волны по отношению к подошве волны за промежуток времени, равный одному периоду волн T. Сокращенно обозначим этот отрезок через $2\xi_T$, подразумевая, что за период T

вершина пробежит расстояние, которое на ξ_T длиннее, чем расстояние, пройденное точкой профиля, лежащей на средней линии между вершиной и подошвой; на такой же отрезок отстанет от этой точки подошва волны. Следовательно, вместо (6) можно записать:

$$\xi_T = \frac{\pi h}{\operatorname{sh} 2\alpha_0}. \tag{7}$$

Отрезок ξ_T связан с h линейной зависимостью. Значит, есть основания полагать, что «опережения» и «отставания» всех иных точек профиля волн, отстоящих по вертикали на y от средней линии, выразятся общим соотношением; в него войдет время τ движения на мелководье:

$$\xi_y = \xi_T \frac{\tau}{T} \frac{2y}{h}. \tag{8}$$

Рассмотрим искажение трохоидальной волны, предшествующее ее разрушению на мелководье. Пусть R будет «радиус круга качения», равный $\lambda/2\pi$. Радиус орбиты поверхностной частицы воды пусть будет $r_0 = h/2$. Наконец, пусть за время движения на мелководье возникло «опережение» вершины ξ и соответственное «отставание» подошвы $-\xi$. Тогда профиль искаженной волны можно будет представить двумя совместными уравнениями:

$$x = R\Theta + r_0 \sin\Theta + \frac{\xi}{r_0} y; \qquad y = r_0 \cos\Theta. \tag{9}$$

Найдя производные от y по x на основании (9), легко показать что наиболее крутой участок искаженной кривой примет вертикальное положение в тот момент, когда вершина волн на мелководье сместится на критическое расстояние ξ_k, определяемое из простого соотношения:

$$\xi_k = \sqrt{R^2 - r_0^2}. \tag{10}$$

Частное от деления ξ_k на ξ_T, очевидно, равно частному от деления критического времени пробега τ_k (в мелководном районе) на T. Значит на основании (7) и (10):

$$\frac{\tau_k}{T} = \frac{\xi_k}{\xi_T} = \frac{\operatorname{sh} 2\alpha_0}{\pi h} \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\pi^2} - \frac{h^2}{4}} = \left(\frac{H}{h}\right) \frac{\operatorname{sh} \alpha_0}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\alpha_0^2} - \left(\frac{h}{2H}\right)^2}. \tag{11}$$

Обычно оказывается возможным пренебречь величиной $(h/2H)^2$ по сравнению с $1/\alpha^2$. Следовательно, вместо (11) можно записать простое выражение:

$$\frac{\tau_k}{T} = \frac{\xi_k}{\xi_T} = \frac{\operatorname{sh} 2\alpha_0}{\pi \alpha_0} \left(\frac{H}{h}\right). \tag{12}$$

Столько периодов волн укладывается в промежутке времени, необходимом для возникновения отвесного переднего склона бывшей трохоидальной волны перед ее разрушением. Очевидно, столько же длин волн укладывается в длине соответствующего критического пробега волн на мелководье. Посредством элементарных преобразований легко привести (2) к виду, сравнимому с нашей формулой (12). После этого выясняется, что критерий, предложенный Джефрисом, приводит к тем более искаженным результатам, чем глубже море. Именно, оказывается, что между критическим сроком τ_k, определенным по (12) (очень близким к истинному), и сроком τ_D, вытекающим из гипотезы цитированного автора, существует соотношение:

$$\frac{\tau_k}{\tau_D} = \frac{3}{4} \operatorname{ch}^2 \alpha_0. \tag{13}$$

Даже при небольших значениях глубины моря H правая часть сильно отличается от единицы и τ_D столь же сильно отличается от истины.

Формулу (12) мы вывели применительно к трохоидальному профилю неискаженной волны. Определив из нее $\xi_к$ и подставив его в (9), легко построить профиль волны в момент перед ее разрушением. Как и следовало ожидать, этот профиль весьма схож с профилем волн мертвой зыби, набежавших на весьма пологий берег и разрушающихся на нем.

Для суждения о разрушающихся ветровых волнах необходимо вместо (9) записать уравнения того же типа, но исходящие из уравнений профиля неискаженной ветровой волны. Это — уравнения (1) в нашей предыдущей статье ([2]). Заимствовав их оттуда, запишем для искаженного профиля:

$$x = R\Theta + a\sin\Theta + \xi_1\cos\Theta; \quad y = b\cos\Theta. \tag{14}$$

Повторив прежние выкладки, легко доказать, что фронт такой искаженной кривой будет на некотором участке отвесным, когда смещение вершины достигнет значения ξ_{90}, удовлетворяющего новому условию:

$$\xi_{90} = \sqrt{R^2 - a^2}. \tag{15}$$

Определив отсюда ξ_{90} и подставив его в (14), мы построили профиль ветровой волны перед ее разрушением. Он очень хорошо совпал с результатами непосредственной киносъемки, полученными в нашем бассейне. Однако оказалось, что нарастание крутизны волн перед этим моментом идет скорее, чем следует из (14): повидимому, волна делается неустойчивой ранее этого момента. Естественно ожидать, что неустойчивость наступает непосредственно после того, как угол при вершине волн становится равным 120° (как в случае так называемой «предельно крутой волны»).

Попытаемся найти критический сдвиг ξ_Λ вершины волн, при котором наступает это условие. Пусть γ_1 и γ_2 будут углы между вертикалью в точке пересечения касательных и, соответственно, „передней" и „задней" касательными к наиболее крутым участкам. Наши условия запишутся так:

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = -\frac{\xi_\Lambda}{b} + \frac{R}{b\sin\Theta} + \frac{a}{b}\operatorname{ctg}\Theta; \quad \operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{\xi_\Lambda}{k} + \frac{R}{b\sin\Theta} + \frac{a}{b}\operatorname{ctg}\Theta,$$
$$\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{2}{3}\pi. \tag{16}$$

Посредством несложных выкладок легко получить отсюда:

$$\xi_\Lambda = \sqrt{R^2 - (a^2 + b^2) - 2\operatorname{tg}\frac{2}{3}\pi\cdot b\sqrt{R^2 - a^2}}. \tag{17}$$

Подставив полученное значение в (14), мы вычертили соответствующий профиль волны; это — нижний предел устойчивости. В действительности неустойчивость может наступить где-то в промежутке между нижним пределом и верхним, который был определен по (15). Легко показать, что, доверяя (15) или (17), мы делаем ошибку против истинного значения $\xi_к$, которая меньше 10%.

Морской гидрофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
15 IX 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Jeffreys, Phil. Mag., 48, 44 (1924). [2] В. В. Шулейкин, ДАН, 93, № 2 (1953).