Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 2

ГЕОФИЗИКА

Д. Л. ЛАИХТМАН и М. И. ЮДИН

ТРАНСФОРМАЦИЯ НИЖНЕГО СЛОЯ ВОЗДУХА ПОД ВЛИЯНИЕМ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 21 IX 1953)

Процесс трансформации воздуха под влиянием деятельной поверхности всегда является комплексным процессом, в котором изменения температуры и влажности воздуха тесно связаны. При построении теории трансформации необходимо получить решение системы уравнений переноса тепла и влаги.

До последнего времени задачи об изменении тепло- и влагосодержания движущихся воздушных масс искусственно разделялись. При такой постановке результаты имели ограниченный характер из-за необоснованной схематизации граничных условий.

В настоящей заметке мы устраняем это ограничение и даем решение задачи для практически важного случая — установившегося процесса трансформации. Излагаемый метод сведения системы уравнений к одному уравнению принципиально применим к общему случаю — неустановившейся трансформации.

Для рассматриваемого случая необходимо решить следующую систему уравнений:

$$u(z)\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial T}{\partial z}, \tag{1}$$

$$u(z)\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial q}{\partial z}. \tag{2}$$

Здесь $u(z)$ — скорость ветра на высоте z; $k(z)$ — коэффициент турбулентного обмена; T — температура воздуха; q — удельная влажность; x — горизонтальная координата. При $x=0$ скачкообразно меняются свойства подстилающей поверхности (край орошаемого массива, водоема и т. п.).

Граничными условиями будут уравнение теплового баланса и условие, определяющее поток водяного пара на подстилающей поверхности. Наиболее общее условие для потока водяного пара имеет следующий вид:

$$\left|\rho k \frac{\partial q}{\partial z} + A(q_0 - q)\right|_{z=0} = 0. \tag{3}$$

Здесь ρ — плотность воздуха; q_0 — насыщающая удельная влажность при температуре подстилающей поверхности; A — коэффициент, зависящий от степени увлажнения почвы. Для испарения с водной поверхности или с достаточно увлажненной почвы значение A определяется теоретическим путем из соображений кинетической теории материи (см., например, [1,2]). Если влажность почвы ниже гигроскопической, то коэффициент A определяется на основании эмпирических данных.

На наветренном краю рассматриваемого участка ($x = 0$)

$$T(x, z)\big|_{x=0} = T'(z); \tag{4}$$

$$q(x, z)\big|_{x=0} = q'(z). \tag{5}$$

На больших высотах

$$|T - T'|_{z\to\infty} \to 0; \tag{6}$$

$$|q - q'|_{z\to\infty} \to 0. \tag{7}$$

Обозначив

$$\tau = T - T', \ \varkappa = q - q' \tag{8}$$

и воспользовавшись малостью τ/T', слабой зависимостью от x потока тепла в почву и противоизлучения, а также приняв пропорциональными коэффициенты турбулентного обмена для областей $x < 0$ и $x > 0$, получаем следующую систему уравнений (ср. ([2]), глава V):

$$\begin{aligned} u(z)\frac{\partial\tau}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z}k(z)\frac{\partial\tau}{\partial z}; \\ u(z)\frac{\partial\varkappa}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z}k(z)\frac{\partial\varkappa}{\partial z} \end{aligned} \tag{9}$$

при краевых условиях:

$$\begin{aligned} &-c_p\rho k\frac{\partial\tau}{\partial z} + 4\sigma T'^3(1-\delta)\tau - h\rho k\frac{\partial\varkappa}{\partial z} = \\ &= \Delta S - c_p\rho(k'-k)\frac{\partial T'}{\partial z} - h\rho(k'-k)\frac{\partial q'}{\partial z} \quad \text{при } z = 0; \end{aligned} \tag{10}$$

$$\rho k\frac{\partial\varkappa}{\partial z} - A\varkappa + A\frac{dq_m}{dT}\bigg|_{T=T'}\tau = -A\left[q_0(T') - q'\right] - \rho k\frac{\partial q'}{\partial z} \quad \text{при } z = 0; \tag{11}$$

$$\tau = 0, \ \varkappa = 0 \ \text{при } x = 0 \text{ и при } z \to \infty. \tag{12}$$

Здесь c_p — удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении; σ — постоянная Стефана — Больцмана; δ — длинноволновое альбедо подстилающей поверхности; h — скрытая теплота испарения; ΔS — разность потоков поглощенной солнечной радиации при $x < 0$ и $x > 0$, обусловленная различием альбедо подстилающей поверхности.

Воспользовавшись тем, что уравнения (9) выполняются для любой линейной комбинации от неизвестных функций, можно решения полученной системы свести к решению одного уравнения. Для этого умножим (11) на

$$\begin{aligned} m_{1,2} = \frac{1}{2}\Bigg[& h + \frac{c_p}{dq_m/dT\big|_{T=T'}} - \frac{4\sigma T'^3(1-\delta)}{A\ dq_m/dT\big|_{T=T'}} \pm \\ & \pm\sqrt{\left[h + \frac{c_p}{dq_m/dT\big|_{T=T'}} - \frac{4\sigma T'^3(1-\delta)}{A\ dq_m/dT\big|_{T=T'}}\right]^2 + \frac{4h\sigma T'^3(1-\delta)}{A\ dq_m/dT\big|_{T=T'}}}\ \Bigg] \end{aligned} \tag{13}$$

и прибавим к (10); тогда для

$$\vartheta_{1,2} = 4\sigma T'^3(1-\delta)\tau - m_{1,2}A\varkappa + m_{1,2}A\frac{dq_m}{dT}\bigg|_{T=T'}\tau \tag{14}$$

получим уравнения:

$$u(z)\frac{\partial\vartheta_{1,2}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}k(z)\frac{\partial\vartheta_{1,2}}{\partial z} \tag{15}$$

при краевых условиях:

$$\left| k \frac{\partial \vartheta_{1,2}}{\partial z} - \beta_{1,2} \vartheta_{1,2} \right|_{z=0} = + N_{1,2}; \tag{16}$$

$$\vartheta_{1,2} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и при } z = \infty, \tag{17}$$

где $\beta_{1,2} = \dfrac{A}{\rho\left(\dfrac{h}{m_{1,2}} - 1\right)}$;

$$N_{1,2} = \frac{\Delta S - c_p \rho (k' - k) \dfrac{\partial T'}{\partial z} - h\rho (k' - k) \dfrac{\partial q'}{\partial z} - A m_{1,2} (q_0 - q') - m_{1,2} \rho k \dfrac{\partial q'}{\partial z}}{\rho (m_{1,2} - h)}. \tag{18}$$

Введем обычную аппроксимацию коэффициента трубулентного обмена и скорости ветра степенными функциями высоты:

$$u(z) = u_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\varepsilon}; \quad k(z) = k_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^{1-\varepsilon} \tag{19}$$

и заменим переменные по формулам

$$\vartheta_{1,2}(x, z) = \tilde{\vartheta}_{1,2}(\xi, \zeta);$$

$$\xi = \frac{k_1 x}{u_1 z_1^2}; \quad \zeta = \frac{2}{1 + 2\varepsilon} \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Рассмотрим теперь вспомогательную задачу, для чего условие (16) временно заменим условием

$$\tilde{\vartheta}_{1,2} \big|_{\zeta=0} = \eta_{1,2}(\xi). \tag{20}$$

Тогда ([4]) решение задачи будет:

$$\tilde{\vartheta}_{1,2}(\xi, \zeta) = \frac{(\zeta_2)^{\frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon}}}{\Gamma\left(\dfrac{\varepsilon}{1 + 2\varepsilon}\right)} \int\limits_0^{\xi} \frac{e^{-\zeta^3/4(\xi - \nu)}}{(\xi - \nu)^{1+\varepsilon/1+2\varepsilon}} \eta(\nu)\, d\nu. \tag{21}$$

Для определения $\eta_{1,2}(\nu)$ воспользуемся теперь условием (16). На основании (21) и (16) получим интегро-дифференциальное уравнение

$$a_{1,2} \int\limits^{\xi} \frac{1}{(\xi - \nu)^n} \frac{d\eta_{1,2}}{d\nu} d\nu + \eta_{1,2}(\nu) = -\frac{N_{1,2}}{\beta_{1,2}}, \tag{22}$$

где

$$a_{1,2} = \frac{k_1 (1 + 2\varepsilon)^{\frac{1}{1+2\varepsilon}}}{z_1 \Gamma\left(\dfrac{\varepsilon}{1 + 2\varepsilon}\right) \beta_{1,2}}; \quad n = \frac{\varepsilon}{1 + 2\varepsilon}.$$

Решением этого уравнения является следующий абсолютно и равномерно сходящийся ряд:

$$\eta_{1,2} = -N_{1,2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left[\dfrac{\xi^n}{a_{1,2} \Gamma(1 - n)}\right]^{k+1}}{\Gamma(1 + kn + n)}. \tag{23}$$

Выражения (23) и (21) являются решением поставленной задачи. Для практических расчетов $\tilde{\vartheta}_{1,2}$ удобно разложить в ряд по степеням n. Так как n имеет порядок 0,1, то при расчетах первые два члена ряда дают совершенно достаточную точность.

Определив из формулы (21) ϑ_1 и ϑ, находим затем τ и $\varkappa$ как линейные комбинации этих величин на основании формулы (14).

Из формул (16) и (20) могут быть легко получены выражения для приращений потоков тепла и водяного пара над рассматриваемой областью

$$P_{1,2} = -N_{1,2} - \beta_{1,2}\,\eta_{1,2}. \tag{24}$$

Функция $\eta_{1,2}$ дана в виде ряда (23), а выражения для приращения испарения и теплоотдачи находятся как линейные комбинации P_1 и P_2, в соответствии с формулой (14).

Поступило
15 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Шулейкин, ЖФХО, **58**, 527 (1926). [2] М. П. Тимофеев, Уч. зап. ЛГУ, № 7, 120 (1949). [3] М. И. Будыко и др. (под ред. Х. П. Погосяна), Изменения климата в связи с планом преобразования природы..., 1951. [4] Д. Л. Лайхтман, Метеорология и гидрология, **1**, 1947.