Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 3

ФИЗИКА

Я. Н. ФЕЛЬД

НАВЕДЕНИЕ ТОКОВ ДВИЖУЩИМИСЯ ЗАРЯДАМИ

(Представлено академиком А. И. Бергом 23 IX 1953)

Из литературы [1] известна теорема, позволяющая найти токи, наведенные движущимся зарядом в системе из m заземленных проводников

$$J_k = Q\mathbf{u}\mathbf{E}_k, \tag{1}$$

Здесь J_k — ток в k-м проводнике; $\mathbf{u}$ — скорость заряда Q; $\mathbf{E}_k$ — электростатическое поле в точке нахождения Q, при расчете которого заряд Q считается отсутствующим, а потенциалы всех проводников, за исключением k-го, равного единице, принимаются при этом равными нулю. Эта формула выведена в предположении, что поле движущегося заряда удовлетворяет уравнению Лапласа, и не учитывает конечной скорости распространения электромагнитных волн. Дадим вывод точной формулы и сравним ее с приближенной формулой (1).

Поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ заряда Q, движущегося со скоростью $\mathbf{u}$ в системе из m заземленных проводников, удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \rho\mathbf{u} \quad \left(\int\rho\, dV = Q\right). \tag{2}$$

Рассмотрим электростатическое поле $\mathbf{E}_k$, возбуждаемое в рассматриваемой системе постоянной сторонней единичной эдс, приложенной вдоль некоторого элемента dl_c линейного провода, соединяющего k-й электрод с землей (рис. 1); заряд Q при расчете $\mathbf{E}_k$ предполагается отсутствующим. Умножив скалярно уравнение (2) на $\mathbf{E}_k$ и вычтя из левой части получившегося равенства произведение $\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E}_k$, что допустимо, так как $\operatorname{rot}\mathbf{E}_k = 0$, получим

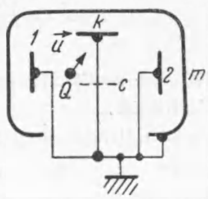

Рис. 1

$$\mathbf{E}_k\operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E}_k \equiv \operatorname{div}[\mathbf{H}\mathbf{E}_k] = \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\mathbf{E}_k + \rho\mathbf{u}\mathbf{E}_k,$$

или, интегрируя по всему пространству V, ограниченному поверхностями проводников s, найдем, используя теорему Гаусса и ограничиваясь случаем точечного заряда Q,

$$\int\limits_{(s)}[\mathbf{H}\mathbf{E}_k]\,\overrightarrow{ds} = Q\mathbf{u}\mathbf{E}_k + \int\limits_{V}\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\mathbf{E}_k dV. \tag{3}$$

Интеграл по бесконечно удаленной сфере обратился при этом в нуль, так как $\mathbf{E}_k$ убывает на бесконечности как r^{-2}. Поверхностный интеграл в формуле (3) сводится к интегралу по поверхности элемента dl_c, вдоль которого приложена постоянная единичная сторонняя эдс, так как на остальной поверхности проводников s касательная составляющая $\mathbf{E}_k$ равна нулю. Учитывая сказанное, а также то, что циркуляция $\mathbf{H}$ по контуру, охватывающему провод, равна току, текущему в нем, найдем

$$\int\limits_{(s)} [\mathbf{H}\mathbf{E}_k]\,\overrightarrow{ds} = J_k,$$

после чего формула (3) принимает окончательный вид:

$$J_k = Q\mathbf{u}\mathbf{E}_k + \int\limits_{(V)} \mathbf{E}_k\, i_{\text{см}}\, dV. \tag{4}$$

Здесь J_k — искомый ток, протекающий через сечение c (см. рис. 1) k-го провода, индуцированный полем $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, т. е. движущимся зарядом Q, а $i_{\text{см}}$ — плотность тока смещения, равная $\varepsilon\,\partial\mathbf{E}/\partial t$. Формула (4) является точной, заменяющей приближенную формулу (1). Первый член ее равен току, определяемому формулой (1), а второй играет роль поправочного.

Рассмотрим пример, в котором системой проводников является плоский диод (рис. 2), состоящий из двух дисков радиуса r_0, находящихся на расстоянии a. Пусть точечный заряд Q начинает двигаться в момент $t = 0$ вдоль оси z от нижней пластины диода с постоянной скоростью $\mathbf{u}$ и момент $t_0 = a/u$ достигает верхней пластины. Чтобы определить возникающий при этом в сечении c провода, соединяющего пластины, ток J (индекс k мы опустили), необходимо определить поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, возбуждаемое движущимся зарядом Q. В рассматриваемом примере при интегрировании по объему (в формуле (4)) можно ограничиться областью V_1, заключенной между пластинами диода. Действительно, электростатическое поле $\mathbf{E}_1$ (индекс $k = 1$), входящее под интеграл, может быть положено равным нулю всюду вне области V_1, если $r_0 > a$ и краевой эффект незначителен. Таким образом, нам достаточно найти $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}$ только внутри V_1. Что касается E_1, то оно при пренебрежении краевым эффектом определяется внутри V_1 выражением $E_1 = E_{1z} = 1/a$, и формула (4) принимает, учитывая сказанное, вид

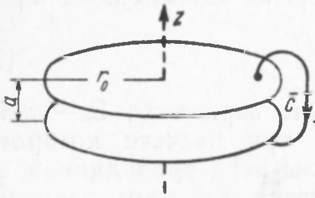

Рис. 2

$$J = \frac{Qu}{a} + \frac{1}{a}\int\limits_0^a I_{\text{см}}\,dz = \frac{Qu}{a} + \tilde{I}_{\text{см}} \qquad \left(I_{\text{см}} = \int i_{\text{см}\,z}\,ds\right), \tag{5}$$

где $\tilde{I}_{\text{см}}$ — среднее (по z) значение всего тока смещения между пластинами.

Обычная формула (1) отличается от выведенной (5) отсутствием члена $\tilde{I}_{\text{см}}$. Для учета его найдем поле $\mathbf{E}$ движущегося заряда в области V_1. Предположим, что обе пластины имеют бесконечные размеры. Поле $\mathbf{E}$ внутри V_1 при этом мало изменится, если пренебречь отражением от краев пластин*. Найдем поле, возбуждаемое между двумя бесконечными пластинами введенным выше движущимся зарядом. Заменим последний эквивалентным ему линейным током j, текущим вдоль оси z между пластинами: $j = Qu\delta(z - ut)$, где δ — дельта-функция. Этот ток как функцию t представим интегралом Фурье

$$j = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{j}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega,$$

где

$$\hat{j}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Qu\,\delta(z - ut)\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{Q}{2\pi}\, e^{-i\omega z/u}. \tag{6}$$

* Это, повидимому, допустимо; действительно, окончательная формула (14) достаточно хорошо передает основные черты процесса.

Теперь задача свелась к нахождению поля **e**, **h**, возбуждаемого линейным током $\hat{j}(\omega)e^{i\omega t}$, после чего искомое поле найдется путем интегрирования по ω. Разложим этот ток на интервале $0 < z < a$ в ряд Фурье по косинусам

$$\hat{j}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos\frac{n\pi}{a} z, \quad \text{где } b_0 = \frac{uQ}{2\pi i a\omega}\left(1 - e^{-i\frac{\omega a}{u}}\right). \tag{7}$$

Теперь легко определить поле, возбуждаемое линейным током $\hat{j}(\omega)e^{i\omega t}$, текущим вдоль оси z на интервале $0 < z < a$ между пластинами:

$$\mathbf{e} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\Pi}, \quad \mathbf{h} = i\omega\varepsilon\operatorname{rot}\vec{\Pi}, \quad \Pi = \Pi_z = -\frac{1}{4\varepsilon\omega}\sum_{n=0}^{\infty} b_n H_0^{(2)}(k_n r)\cos\frac{n\pi}{a} z\cdot e^{i\omega t}, \tag{8}$$

где $k_n = \sqrt{k^2 - (\pi n/a)^2}$, $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega/v$.

Возвращаясь к задаче о поле, возбуждаемом между конечными пластинами, мы, на основании сказанного ранее, будем считать, что и в этом случае оно описывается внутри V_1 выражениями (8). Среднее (по z) значение всего тока смещения, протекающего между пластинами диода в направлении z, для частоты ω равно

$$\tilde{I}_{\text{см}}(\omega) = \frac{2\pi}{a}\int_0^a\int_0^{r_0} ri\,\omega\,\varepsilon e_z\,dr\,dz.$$

Переставляя сюда значение e_z из формулы (8), получим после интегрирования

$$\tilde{I}_{\text{см}}(\omega) = \frac{\pi b_0}{2i}\left\{kr_0 H_1^{(2)}(kr_0) - \frac{2i}{\pi}\right\}e^{i\omega t}. \tag{9}$$

Весь средний ток смещения $\tilde{I}_{\text{см}}$ получится после интегрирования (9) по ω от $-\infty$ до $+\infty$ (см. формулу (6)):

$$\tilde{I}_{\text{см}} = \frac{\pi}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} b_0\left\{kr_0 H_1^{(2)}(kr_0) - \frac{2i}{\pi}\right\}e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{10}$$

Для того чтобы сделать подинтегральную функцию однозначной на комплексной плоскости ω, необходимо провести на ней разрез вдоль отрицательной вещественной оси. При этом, в соответствии с принципом излучения и асимптотической формулой для функции Ганкеля $H_1^{(2)}$, интеграл в выражении (10) должен быть взят по нижнему берегу разреза.

Введем безразмерное время $\tau = \frac{t}{r_0\sqrt{\varepsilon\mu}} = t\frac{v}{r_0}$, новое переменное $\gamma = kr_0 = \frac{r_0}{v}\omega$ и заменим b_0 ее значением, взятым из формул (7); тогда выражению (10) можно придать вид

$$\tilde{I}_{\text{см}} = \frac{Qu}{a}\{-F(\tau) + F(\tau - \tau_0)\}, \tag{11}$$

где

$$F(\tau) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{H_1^{(2)}(\gamma) - \frac{2i}{\pi\gamma}\right\}e^{i\tau\gamma}\,d\gamma, \qquad \tau_0 = \frac{av}{r_0 u}. \tag{12}$$

Путь интегрирования в (12) проводится так же, как в формуле (10). Интеграл (12) можно вычислить для $\tau < 1$, смещая путь интегрирования параллельно самому себе вниз и применяя затем теорему о вычетах с учетом асимптотического поведения $H_1^{(2)}$ на бесконечности.

При $\tau > 1$ следует сначала при помощи соотношения обхода $H_1^{(2)}(\gamma) = H_1^{(2)}(\gamma e^{2\pi i}) - 4J_1(\gamma)$ преобразовать путь интегрирования в формуле (12) в путь, проходящий вдоль верхнего берега разреза, а затем применить теорему о вычетах. При этом в выражение (12) войдет также табличный интеграл типа $\int\limits_0^\infty J_1(\gamma)\, e^{-i\tau\gamma} d\gamma$. Проведя все эти преобразования, найдем

$$F(\tau) = 0, \quad \tau < 0; \qquad F(\tau) = 1, \quad 0 < \tau < 1; \qquad F(\tau) = 1 - \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}}, \quad \tau > 1. \tag{13}$$

Теперь легко написать выражение для $\widetilde{I}_{\text{см}}$ и J (см. (5)):

$$J = \frac{Qu}{a}\begin{cases} 0, & \tau < 1 \ (t < r_0/v); \\ \dfrac{\tau}{\sqrt{\tau^2-1}}, & 1 < \tau < 1 + \tau_0 \left(\dfrac{r_0}{v} < t < \dfrac{r_0}{v} + \dfrac{a}{u}\right); \\ \dfrac{\tau}{\sqrt{\tau^2-1}} - \dfrac{\tau - \tau_0}{\sqrt{(\tau-\tau_0)^2-1}}, & \tau > 1 + \tau_0 \left(t > \dfrac{r_0}{v} + \dfrac{a}{u}\right), \end{cases} \tag{14}$$

в то время как ток, подсчитанный по формуле (1), равен

$$J = \frac{Qu}{a} \ \text{при} \ 0 < \tau < \tau_0 \quad (0 < t < a/u);$$
$$J = 0 \quad \text{при} \quad \tau < 0 \quad \text{и} \quad \tau > \tau_0 \ (t < 0 \ \text{и} \ t > a/u). \tag{15}$$

Физический смысл формулы (14) вполне ясен. До момента $t = r_0/v$ ток J в проводе отсутствует, так как заряд Q начинает двигаться в момент $t = 0$, а для того, чтобы вызванное им электромагнитное возмущение достигло провода, оно должно пройти со скоростью v путь не меньший чем r_0. В действительности этот путь больше (см. рис. 1) и „задержка“ должна быть больше r_0/v, однако формула (14) этого не учитывает, так как при ее выводе интегрирование производилось только по части пространства, заключенной между пластинами. В моменты $t = 0$ и $t = a/u$ производная скорости заряда Q обращается в бесконечность, поэтому в соответствующие моменты $t = r_0/v$ и $t = r_0/v + a/u$, сдвинутые на время r_0/v, необходимое для распространения, ток J обращается в бесконечность. Ток $J \neq 0$ и после прекращения движения заряда, так как в системе имеет место устанавливающийся процесс. Апериодический характер последнего объясняется тем, что мы отбросили при вычислениях интеграл по внешнему пространству и пренебрегли отражением от краев дисков. При некоторых соотношениях между r_0, a, u процесс мог бы быть периодически затухающим.

Поступило
11 IX 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. А. Гринберг, Избр. вопросы матем. теории электр. и магнитн. явлений, 1948, стр. 650.