Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 2

МАТЕМАТИКА

П. КОНТОРОВИЧ

К ТЕОРИИ ПОЛУГРУПП В ГРУППЕ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 29 VI 1953)

В инвариантной в своем замыкании полугруппе произвольной группы без кручения имеет место теория идеалов, сходная с теорией идеалов в коммутативных кольцах (см., например, [1]). Элементам такой теории посвящается настоящая заметка *. Результаты могут быть применены, в частности, к идеалам полугруппы положительных элементов частично упорядоченной группы без кручения.

Пусть $\mathfrak{S}$ — полугруппа в группе G. Подполугруппа $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{S}$ называется левым идеалом в $\mathfrak{S}$, если $\mathfrak{S}\mathfrak{A} < \mathfrak{A}$; аналогично определяется правый идеал в $\mathfrak{S}$. Идеал из $\mathfrak{S}$ называется двусторонним, если он одновременно левый и правый идеал. Полугруппа без собственных левых (правых) идеалов есть группа. Подгруппа $\mathfrak{S}$ из G называется инвариантной в себе, если она инвариантна в своем групповом замыкании.

1°. В инвариантной в себе полугруппе $\mathfrak{S}$ из G всякий идеал является двусторонним.

В дальнейшем, где не оговорено, имеются в виду идеалы в заданной инвариантной в себе полугруппе $\mathfrak{S}$ фиксированной группы без кручения G.

Идеал $\mathfrak{p}$ называется простым, если его $\mathfrak{S}$-дополнение $C(\mathfrak{p}) = \mathfrak{S} - \mathfrak{p}$ будет полугруппой. $\mathfrak{A}$ — изолированный идеал, если из $x \in \mathfrak{S}$, $x^\mu \in \mathfrak{A}$ следует $x \in \mathfrak{A}$ (μ — натуральное число). Пересечение всех изолированных идеалов, содержащих данный идеал $\mathfrak{A}$, называется изолятором идеала $\mathfrak{A}$ и обозначается через $I(\mathfrak{A})$.

2°. Сумма простых идеалов есть простой идеал. Сумма и пересечение (изолированных) идеалов есть (изолированный) идеал.

3°. Изолятор $I(\mathfrak{A})$ идеала $\mathfrak{A}$ состоит из тех и только тех элементов полугруппы $\mathfrak{S}$, некоторая степень которых содержится в $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$ — множество всех тех элементов из $\mathfrak{S}$, некоторая степень которых содержится в $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{B}$ — идеал. Действительно, из $b \in \mathfrak{B}$, $b^\mu \in \mathfrak{A}$ следует для всякого элемента $s \in \mathfrak{S}$:

$$(bs)^\mu = \overbrace{bs, bs \ldots bs}^{\mu} = b^\mu (b^{-(\mu-1)} s b^{\mu-1}) \ldots (b^{-1} s b) s \in \mathfrak{A},$$

т. е. $bs \in \mathfrak{B}$. $\mathfrak{B}$ — изолированный идеал, так как из $x \in \mathfrak{S}$, $x^\alpha \in \mathfrak{B}$ следует $x^{\alpha\beta} \in \mathfrak{A}$, т. е. $x \in \mathfrak{B}$. Мы получили, таким образом, что $I(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{B}$. С другой стороны, легко видеть, что также $\mathfrak{B} \subset I(\mathfrak{A})$. Следовательно, $\mathfrak{B} = I(\mathfrak{A})$.

4°. Пусть $\mathfrak{N}$ — подполугруппа полугруппы $\mathfrak{S}$. Тогда сумма всех идеалов из $\mathfrak{S}$, лежащих в $C(\mathfrak{N}) = \mathfrak{S} - \mathfrak{N}$, будет простым идеалом $\mathfrak{p}$.

* Идеалы для полугрупп (коммутативных) впервые были введены И. В. Арнольдом [2].

Доказательство. Докажем простоту идеала $\mathfrak{p}$. Пусть a, b — два элемента из $C(\mathfrak{p}) = \mathfrak{S} - \mathfrak{p}$, для которых $ab \in \mathfrak{p}$. Образуем идеалы $\{\mathfrak{p}, a\}$, $\{\mathfrak{p}, b\}$, которые, очевидно, уже пересекаются с $\mathfrak{R}$. Пусть

$$s_1 a = r_1, \ s_2 b = r_2, \ r_1, r_2 \in \mathfrak{R}, \quad s_1, s_2 \in \mathfrak{S}.$$

Но отсюда следует

$$r_1 r_2 = s_1 a \cdot s_2 b = s_1 \cdot a s_2 a^{-1} \cdot ab \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{R}$$

вопреки условию $\mathfrak{p} \subset C(\mathfrak{R})$. Полученное противоречие доказывает простоту идеала $\mathfrak{p}$.

Простой идеал $\mathfrak{p}$ будем называть минимальным простым идеалом над идеалом $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{p}$ содержит (или совпадает с) $\mathfrak{A}$ и между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{p}$ нет простых идеалов.

5°. Множество $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{S}$ тогда и только тогда будет минимальным простым идеалом над идеалом $\mathfrak{A}$, когда $C(\mathfrak{p}) = \mathfrak{S} - \mathfrak{p}$ будет максимальной полугруппой в $C(\mathfrak{A}) = \mathfrak{S} - \mathfrak{A}$.

Доказательство. а) Пусть $C(\mathfrak{p})$ — максимальная полугруппа в $C(\mathfrak{A})$. Из $C(\mathfrak{p}) \subset C(\mathfrak{A})$ следует $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{P}$ есть сумма всех идеалов из $\mathfrak{S}$, лежащих в $\mathfrak{p} = \mathfrak{S} - C(\mathfrak{p})$. Из $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{p}$ следует $C(\mathfrak{P}) \supset C(\mathfrak{p})$. Но так как $C(\mathfrak{p})$ максимальная полугруппа в $C(\mathfrak{A})$, то $C(\mathfrak{P}) \subset C(\mathfrak{p})$ и $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}$. Следовательно, $\mathfrak{p}$ — простой идеал (согласно 4°) и, как легко видеть, минимальный над $\mathfrak{A}$.

б) Пусть $\mathfrak{p}$ — минимальный простой идеал над $\mathfrak{A}$, $C(\mathfrak{p}) = \mathfrak{R}$ — полугруппа из $C(\mathfrak{A})$. Докажем максимальность $\mathfrak{R}$ в $C(\mathfrak{A})$. Пусть $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}_1 \subset$ $\subset C(\mathfrak{A})$, где $\mathfrak{R}_1$ — максимальная полугруппа из $C(\mathfrak{A})$, содержащая $\mathfrak{R}$. По предыдущему, $\mathfrak{p}_1 = C(\mathfrak{R}_1)$ будет минимальным простым идеалом над $\mathfrak{A}$, причем $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}$, но это невозможно, так как противоречит минимальности $\mathfrak{p}$.

6°. Изолятор $I(\mathfrak{A})$ идеала $\mathfrak{A}$ есть пересечение всех минимальных простых идеалов над $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$ — пересечение всех минимальных простых идеалов над $\mathfrak{A}$. Очевидно, что $I(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{B}$, так как всякий простой идеал является изолированным идеалом. Пусть теперь $x \in \mathfrak{S}$, $x \overline{\in} I(\mathfrak{A})$. Докажем существование минимального простого идеала над $\mathfrak{A}$, не содержащего элемента x. Действительно, пусть X — полугруппа всех целых положительных степеней элементов x (X — циклическая полугруппа, порожденная элементом x) и X_1 — максимальная полугруппа из $C(\mathfrak{A})$, содержащая X. Тогда $C(X_1)$ будет минимальным простым идеалом над $\mathfrak{A}$, не содержащим элемента x. Тем самым мы дополнительно получили, что элементы, не принадлежащие $I(\mathfrak{A})$, не принадлежат $\mathfrak{B}$. Следовательно, $\mathfrak{B} = I(\mathfrak{A})$.

7°. Каждый простой идеал $\mathfrak{P}$, содержащий идеал $\mathfrak{A}$, содержит какой-либо минимальный простой идеал над $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Из $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ следует $C(\mathfrak{A}) \supset C(\mathfrak{P}) = M$. Пусть $M \subset M_1 \subset C(\mathfrak{P})$, где M_1 — максимальная полугруппа из $C(\mathfrak{A})$. Тогда $\mathfrak{P} \supset C(M_1) \supset \mathfrak{A}$ и $C(M_1)$ — минимальный простой идеал над $\mathfrak{A}$, лежащий в $\mathfrak{P}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — идеал в $\mathfrak{S}$, $C(\mathfrak{A}) = \mathfrak{S} - \mathfrak{A}$ — его $\mathfrak{S}$-дополнение. Элемент $b \in \mathfrak{S}$ назовем левым $C(\mathfrak{A})$-элементом, если $bC(\mathfrak{A}) \subset C(\mathfrak{A})$; аналогично определяется правый $C(\mathfrak{A})$-элемент. b является двусторонним $C(\mathfrak{A})$-элементом, если $bC(\mathfrak{A}) \subset C(\mathfrak{A})$, $C(\mathfrak{A})\, b \subset C(\mathfrak{A})$.

Множество всех левых $C(\mathfrak{A})$-элементов составляет полугруппу Π_1. Множество всех правых $C(\mathfrak{A})$-элементов составляет полугруппу Π_2. Полугруппа $\Pi = \Pi_1 \cap \Pi_2$ есть множество всех двусторонних $C(\mathfrak{A})$-элементов.

8°. Множества $C(\Pi_1) = \mathfrak{S} - \Pi_1$, $C(\Pi_2) = \mathfrak{S} - \Pi_2$, $C(\Pi) = \mathfrak{S} - \Pi$ суть простые идеалы.

Доказательство. Пусть $u \in C(\Pi_1)$. Тогда существует $v \in C(\mathfrak{A})$ такой, что $uv \in \mathfrak{A}$. Отсюда получаем для идеала $\overline{\mathfrak{S}u} = \mathfrak{S}u \cup u$ и соотношение $\overline{\mathfrak{S}u} \cdot v \subset \mathfrak{A}$, т. е. $\overline{\mathfrak{S}u}$ также принадлежит $C(\Pi_1)$. Следовательно, $C(\Pi_1)$, как сумма идеалов вида $\overline{\mathfrak{S}u}$, где u пробегает $\mathfrak{S}$, будет также идеалом. Этот идеал простой, так как его $\mathfrak{S}$-дополнение Π_1 есть полугруппа.

Точно так же получается, что $C(\Pi_2)$ — простой идеал. Для $C(\Pi)$ имеем $C(\Pi) = C(\Pi_1 \cap \Pi_2) = C(\Pi_1) \cup C(\Pi_2)$, и этот идеал, как сумма простых идеалов, будет простым.

9°. Изолятор $I(\mathfrak{A})$ идеала $\mathfrak{A}$ лежит в $C(\Pi_1) \cap C(\Pi_2)$.

Доказательство. Всякий простой идеал над $\mathfrak{A}$ содержит минимальный простой идеал над $\mathfrak{A}$, а $I(\mathfrak{A})$ есть пересечение всех минимальных простых идеалов над $\mathfrak{A}$.

Будем называть идеал $\mathfrak{A}$ инвариантным в $\mathfrak{S}$, если $s\mathfrak{A}s^{-1} = \mathfrak{A}$ для всякого $s \in \mathfrak{S}$. Очевидно, что $\mathfrak{A}$ инвариантный в групповом замыкании для $\mathfrak{S}$.

10°. Каждый идеал $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{S}$ содержится в минимальном инвариантном идеале над $\mathfrak{A}$.

11°. Изолятор инвариантного идеала будет инвариантным идеалом.

12°. Для инвариантного в $\mathfrak{S}$ идеала $\mathfrak{A}$ будет $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi$, и эти полугруппы инвариантны в $\mathfrak{S}$.

13°. Всякий минимальный простой идеал $\mathfrak{p}$ над инвариантным в $\mathfrak{S}$ идеалом $\mathfrak{A}$ содержится в $C(\Pi)$. Другими словами, $\mathfrak{p}$ состоит только из не $C(\mathfrak{A})$-элементов.

Доказательство. $C(\mathfrak{p})$ есть максимальная полугруппа в $C(\mathfrak{A})$. Образуем полугруппу $T = \Pi \cup C(\mathfrak{p}) \cup \Pi \cdot C(\mathfrak{p})$ (T — полугруппа в силу инвариантности Π). Легко видеть, что $T \subset C(\mathfrak{A})$. Действительно, это очевидно для Π и $C(\mathfrak{p})$; пусть теперь $t \in \mathfrak{A}$, где $t = bc$, $b \in \Pi$, $c \in C(\mathfrak{p})$; тогда, согласно определению Π, должно быть $c \in \mathfrak{A}$, что невозможно, так как $C(\mathfrak{p}) \subset C(\mathfrak{A})$. Из $T \subset C(\mathfrak{A})$ мы заключаем $T = C(\mathfrak{p})$ в силу максимальности $C(\mathfrak{p})$. Следовательно, $\Pi \subset C(\mathfrak{p})$ и $\mathfrak{p} \subset C(\Pi)$, что и требовалось.

Поступило
1 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Neal H. McCoy, Rings and Ideals, 1948. [2] И. В. Арнольд, Матем. сборн., 36, 401 (1929).