Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 2

МАТЕМАТИКА

М. И. ВИШИК

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 22 VIII 1953)

1. В настоящей заметке изучается вторая краевая задача для уравнения

$$Lu \equiv \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = h(x), \tag{1}$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, эллиптического в точках x области D' и параболического (с **любым** рангом вырождения соответствующей квадратичной формы) в точках $x \in \Gamma_0'$, где Γ_0' — часть границы D'. Коэффициенты $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$ предполагаются дифференцируемыми, $c(x)$ — ограниченным в D'; $a_{ik}(x)$ и $b_i(x)$ непрерывны в $\overline{D'}$. Пусть область D' лежит в полупространстве $x_n > 0$, а Γ_0' — в плоскости $x_n = 0$.

Как и в заметке ([1]), в которой рассматривалась первая краевая задача, применение функциональных методов исследования позволяет выяснить структуру разрешающего оператора, соответствующего задаче, найти достаточные условия единственной разрешимости и регулярной разрешимости задачи, выяснить некоторые свойства резольвенты и т. п. Аналогичными методами исследуются соответствующие задачи для уравнений высших порядков и для систем уравнений.

2. Для простоты изложения предположим, что для всех чисел ξ_i выполнено неравенство

$$0 \leqslant a_{nn}(x)\xi_n^2 \leqslant C^2 \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k \quad (x \in D'), \tag{2}$$

где C^2 не зависит от x и ξ_i (см. ([1])).

Пусть H, соотв. R_G, — гильбертово пространство функций $u(x)$, соотв. градиентов Gu. Скалярные произведения в этих пространствах зададим формулами

$$[u, v] = \iint_D u \cdot v\, dx, \quad \{Gu, Gv\} = \iiint_D \Big[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_k} + \gamma^2 uv\Big] dx, \tag{3}$$

где γ^2 — постоянная, область $D \subset D'$ имеет часть границы Γ_0 на $x_n = 0$, причем Γ_0 лежит строго внутри Γ_0'. Остальную часть границы области D обозначим через Γ_1, $\Gamma_1 \subset (x_n > 0)$. Предполагается, что угол между Γ_1 и Γ_0 нигде не равен нулю.

Через $\Omega^1(D)$ обозначим многообразие непрерывных в D функций $u(x)$, имеющих кусочно-непрерывные, ограниченные в D первые производные. Оператор градиента G отображает $\Omega^1(D)$ на некоторое многообразие $R_G^1 \subset R_G$: $R_G^1 = G\Omega^1(D)$. Замыкание оператора G, рассматриваемого на $\Omega^1(D)$, будем обозначать также через G, а его область определения — через $\Omega(D)$. Очевидно, область изменения G совпадает с R_G. Введем еще следующее обозначение: $\int\limits_\Gamma u\cdot v\, d\Gamma = (u, v)_\Gamma$.

Лемма 1. *Пусть* $c^2 x_n^\alpha \leqslant a_{nn}(x) \leqslant C^2 x_n^\alpha$ *для* $x \in D'$.

а) *Если* $0 \leqslant \alpha < 1$ *(см.* ([1])*), то каждая функция* $u(x)$ *из* $\Omega(D)$ *принимает в среднем с весом* ρ *некоторые предельные значения на* Γ, *причем:*

$$[u, u] + (\rho u, u)_\Gamma \leqslant \tilde{C}^2 \{Gu, Gu\}. \tag{4}$$

Вес $\rho(P) > 0$ *всюду, за исключением, быть может, точек множества* $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1$. *Точнее, если*

$$x_n^\beta \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leqslant C_1^2 \sum_{i,\,k=1}^n a_{ik}(x)\xi_i\xi_k \quad (C_1 \neq 0), \tag{5}$$

то во всяком случае достаточно положить $\rho(P) = [d(P)]^{\beta-1}$ *для* $\beta > 1$, *где* $d(P)$ — *расстояние от точки* P *до* $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1$, $\rho(P) = |\ln d|^{-1}$ *для* $\beta = 1$ *и* $\rho \equiv 1$ *для* $\beta < 1$.

Если характеристики в точках* $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1$ *имеют ненулевое пересечение с множеством* $D \cap U(\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1)$, *где* U — *окрестность, и не касаются* Γ_1, *то достаточно в* (4) *положить* $\rho \equiv 1$. (В случае касания характеристик к Γ_1 иногда можно в (4) после замены Γ на Γ_0 положить $\rho \equiv 1$.)

б) *Если* $\alpha \geqslant 1$ *(т. е. направление плоскости* $x_n = 0$ *является характеристическим в любой точке* $x \in \Gamma_0$*), то в* $\Omega(D)$ *существуют функции, стремящиеся к бесконечности при* $x_n \to 0$. *При этом оценка* (4) *справедлива лишь тогда, если в нее вместо* Γ *подставить* Γ_1**.

Очевидно, утверждения типа лемм 1, 2 настоящей заметки, а также лемм 1, 2 заметки ([1]) являются обобщением на случай вырождающихся метрик типа $\{,\}$ известных теорем вложения ([2]).

3. Под второй краевой задачей в случае а) будем подразумевать задачу, состоящую в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего на всей границе $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ области D условию

$$\sum_{i,\,k=1}^n a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos nx_k + A(s)\,u \equiv \frac{\partial u}{\partial \nu} + A(s)\,u = \varphi(s). \tag{6}$$

Обозначим через $\overline{\Omega}(D)$ многообразие тех функций $v(x)$ из $\Omega(D)$, которые имеют суммируемые в квадрате первые частные производные. Под решением (обобщенным) второй краевой задачи в случае а) будем понимать такую функцию $u(x) \in \Omega(D)$, что для любой функции $v(x) \in \overline{\Omega}(D)$ выполнено соотношение:

$$[h, v] - (\varphi, v)_\Gamma = -\{Gu, Gv\} - \left[u, \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right] + \left(\sum_{i=1}^n (b_i \cos nx_i - A)\,u, v\right)_\Gamma +$$
$$+ \left[\left(c - \sum_{i=1}^n b'_{i\,x_i} + \gamma^2\right)u, v\right], \quad h \in H, \quad \varphi \in \mathcal{L}_\Gamma^2(\rho^{-1}). \tag{7}$$

---

* Под характеристикой, соответствующей данной точке, мы понимаем пересечение всех плоскостей, имеющих характеристическое направление в этой точке.

** Аналогичные утверждения справедливы относительно вполне непрерывности соответствующих операторов вложения.

Очевидно, что гладкие решения второй краевой задачи этому соотношению удовлетворяют.

Теорема 1. *Предположим, что имеет место случай* а) *и выполнены неравенства*

$$c^2 x_n \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik}(x_1, \ldots, x_n)\xi_i\xi_k \leqslant C^2 \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_1, \ldots, x_n)\xi_i\xi_k, \tag{8}$$

где c^2 и C^2 не зависят от x и ξ_i. Если

$$c(x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b'_{i_{x_i}}(x) \leqslant -\gamma^2 \qquad (x \in D), \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i \cos nx_i - A \leqslant 0 \quad (x \in \Gamma), \tag{9'}$$

то вторая краевая задача имеет, и притом единственное, решение.

Если условия (9) *не выполнены, но функция $\sum_{i=1}^{n} b'_{i_{x_i}}$ ограничена, то во всяком случае для второй краевой задачи при $\varphi(s) \equiv 0$ для уравнения* (1) *и сопряженной с ней краевой задачи имеют место теоремы, аналогичные трем теоремам Фредгольма.*

Оператор L, соответствующий второй краевой задаче при $\varphi(s) \equiv 0$, полуограничен, его спектр — дискретный и конечнократный, а резольвента $(L - \lambda E)^{-1}$ для регулярных значений λ вполне непрерывна (и имеет структуру, указанную ниже).

Для доказательства единственности решения в случае (9) положим в формуле (7) $h \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$ и отсюда выведем, что $u \equiv 0$. Для простоты изложения предположим, что для $h < h_0$ с возрастанием h проекция множества $D \cap (x_n = h)$ на плоскость $x_n = 0$ возрастает. Положим в (7) $v = u_\delta(x_1, \ldots, x_n)$, где $u_\delta = u$ для $x_n \geqslant \delta$ и $u_\delta(x_1, \ldots, x_n) = u(x_1, \ldots, x_{n-1}, \delta)$ для $x_n \leqslant \delta$ и $(x_1, \ldots, x_n) \in D$. Тогда, как доказывается, в результате предельного перехода по некоторой последовательности $\delta_n \to 0$ получим $0 \geqslant \{Gu, Gu\}$, откуда следует $u \equiv 0$.

Для доказательства существования решения реализуем правую часть (7) в виде билинейной формы некоторого оператора в R_G:

$$[h, v] - (\varphi, v)_\Gamma = \{Gu, (-E + K)Gv\}, \tag{10}$$

и аналогично тому, как это сделано в ([1], [4], [5]) выводим, что решение u задачи дается формулой:

$$u = G^{-1}(-E + K)^{*-1} W^*(h, \varphi) = L^{-1}(h, \varphi), \tag{11}$$

где W — оператор вложения, отображающий Gv на пару функций $(v(x), v(s))$ (см. ([4], [5])) (в силу (4) он ограничен), а звездочка означает переход к сопряженному оператору.

Легко показать, что оператор G^{-1} в рассматриваемом случае вполне непрерывен (ср. с леммой 2). Отсюда следуют сформулированные в теореме утверждения относительно оператора L.

4. В случае б), если $b_n(x) \geqslant -x_n^{\alpha-1} |\ln x_n|^{-\delta}$ $(\delta > 0)$* в некоторой

* При $\alpha = 1$ множитель $x_n^{\alpha-1}$ следует заменить на $[\ln x_n]^{-1}$.

окрестности Γ_0, вторая краевая задача ставится так: ищется решение уравнения (1), удовлетворяющее на Γ_1 граничному условию (6); на Γ_0 никаких условий не задается (см. по этому вопросу также ([3])).

Под решением (обобщенным) этой задачи мы будем понимать такую функцию $u(x)$, что для всякой функции $v(x) \in \Omega(D)$, обращающейся в нуль вблизи Γ_0, выполнено соотношение:

$$[h, v] - (\varphi, v)_{\Gamma_1} = -\{Gu, Gv\} + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, v\right] + [(c+\gamma^2) u, v] - (Au, v)_{\Gamma_1}. \tag{12}$$

Теорема 2. *В случае* б), *если* $b_n(x) \geqslant -x_n^{\alpha-1} |\ln x_n|^{-\varepsilon}$ *в некоторой окрестности* Γ_0, *а в* D *и на* Γ_1 *выполнены неравенства* (9), *то вторая краевая задача имеет, и притом единственное, решение для любых правых частей* $h(x) \in H$, $\varphi(s) \in \mathscr{L}^2_{\Gamma_1}(\rho^{-1})$.

5. Если выполнено условие б) и $b_n(x) < 0$ на Γ_0, то вторую однородную краевую задачу естественно ставить так: ищется решение уравнения (1), удовлетворяющее на Γ_1 однородному условию (6) и обращающееся в нуль на Γ_0. Действительно, оператор L, соответствующий этой задаче, является, как доказывается, в этом случае сопряженным с оператором L^*, соответствующим второй однородной краевой задаче для уравнения $L^*v = g$, причем последнее уравнение сопряжено с уравнением (1). Но в уравнении $L^*v = g$ коэффициент $b_n(x) > 0$ для $x \in \Gamma_0$, а следовательно, для него вторая краевая задача ставится так, как указано в п. 4. Значит, если выполнены в области D и на Γ_1 неравенства (9), условие б) и неравенство $b_n(x) < 0$ на Γ_0, то вторая краевая задача для уравнения (1) (в указанной выше постановке) имеет, и притом единственное, решение (так как, согласно теореме 2, оператор L^* имеет ограниченный обратный).

6. Лемма 2. *Если выполнено неравенство* (5) *при* $\beta < 2$, *то оператор* G^{-1} *вполне непрерывен* (см. сноску ** на стр. 226).

Теорема 3. *Если при некотором* $\beta < 2$ *имеет место неравенство* (5), *то для вторых краевых задач* (*при* $\varphi(s) = 0$ *на* Γ_1) *для уравнений* (1) *и* $L^*v = g$ *всегда имеют место три теоремы, аналогичные трем теоремам Фредгольма. Оператор* L, *соответствующий второй краевой задаче* (*при* $\varphi(s) = 0$ *на* Γ_1) *полуограничен* ($[Lu, u] \leqslant M[u, u]$) *и имеет дискретный, конечнократный спектр. Резольвента* $(L - \lambda E)^{-1}$ *для регулярных значений* λ *имеет структуру, аналогичную* (11), *и является вполне непрерывной.*

В случае $\rho = 0$ на $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1$ в теоремах 1, 2, 3 предполагается дополнительно, что A и $\Sigma\, b_i \cos nx_i$ на $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1$ обращаются в нуль соответствующего порядка.

7. Аналогично тому, как указано в ([4], [5]), сформулированные утверждения можно распространить и на задачи с косой производной для уравнения (1).

8. Результаты, полученные в ([1]) и в настоящей заметке, легко переносятся также на эллиптические уравнения, имеющие внутри области поверхность параболичности.

Поступило
14 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Вишик, ДАН, 93, № 1 (1953). [2] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. [3] О. А. Олейник, ДАН, 87, № 6 (1952). [4] М. И. Вишик, ДАН, 81, № 5 (1951). [5] М. И. Вишик, ДАН, 86, № 4 (1952).