

Член-корреспондент АН СССР А. Д. АЛЕКСАНДРОВ и В. В. СТРЕЛЬЦОВ

ОЦЕНКИ ДЛИНЫ КРИВОЙ НА ПОВЕРХНОСТИ

1. В этой заметке сообщаются оценки длины кривой на поверхности в зависимости от размеров поверхности, ее кривизны и поворота кривой. Точнее, оценки касаются кривых на многообразиях ограниченной кривизны в том смысле, как последние определены в (1). В таком многообразии рассматривается гомеоморфная кругу замкнутая область и кривые в ней. Оценки длины кривой даются в зависимости от размеров области (которые мы характеризуем либо периметром, либо диаметром), положительной части ее кривизны (определение см. (1)), и, наконец, в зависимости от «извивания» самой кривой, причем «извивание» или собственный поворот кривой L , согласно (2), можно коротко определить следующим образом.

Если кривая L не имеет кратных точек и τ_r^+ , τ_l^+ — положительные части правого и левого ее поворотов, а ω_L^+ — положительная часть ее кривизны (как множества точек), то «извивание» кривой L есть $\sigma = \tau_r^+ + \tau_l^+ - \omega_L^+$. (Поворот τ есть аддитивная функция дуги — вообще, множества точек кривой, — и $\tau^+ = 1/2 (\text{var } \tau + \tau)$.)

Если кривая имеет кратные точки, то ее «извивание» определяется как сумма извиваний ее дуг без кратных точек и извиваний в точках деления. Кроме того, если кривая имеет общие точки с границей области, то для множества этих точек считается $\omega^+ = 0$ и с внешней стороны $\tau^+ = 0$.

Часть результатов этой заметки (теоремы 2, 3, 5) была опубликована в (3), однако в несколько более слабой форме, так как там фигурировало не извивание, а сами величины τ^+ . Например, для кривой, состоящей из двух образующих конуса, делящих полный угол при его вершине пополам, извивание $\sigma = 0$, но τ_r^+ и τ_l^+ отличны от нуля.

Всюду дальше речь идет о кривой L в гомеоморфной кругу области G в многообразии ограниченной кривизны. При этом s и σ обозначают длину и извивание кривой L ; ω^+ , ω^- — положительную и отрицательную части кривизны области G (точнее, только внутренней ее части); p и d — периметр и диаметр области G .

2. Следующая теорема 1, интересная сама по себе, хотя и не относится прямо к рассматриваемому вопросу, но служит основным средством в доказательстве теоремы 3.

Теорема 1. Среди всех областей с данными p и $\omega^+ < 2\pi$ наибольшую площадь S имеет область, изометричная боковой поверхности прямого кругового конуса.

Так как площадь такого конуса равна $\frac{p^2}{2(2\pi - \omega^+)}$, то теорема утверждает, что для всякой области $S \leq \frac{p^2}{2(2\pi - \omega^+)}$ и равенство имеет место здесь тогда и только тогда, когда область изометрична боковой поверхности прямого кругового конуса.

Доказательство этой и большинства из приведенных далее теорем проводится по следующей схеме:

А. Доказываются аналогичные предложения для многогранников (точнее, вообще для разверток) и ломаных на них. (Подробные доказательства таких предложений см. (5)). При этом систематически используется «метод разрезывания и склеивания» (см. (4)). Например, для теоремы 1 коротко это можно представить так (мы несколько упрощаем вывод, выявляя только его сущность). В разрез по кратчайшей, соединяющей на многограннике две вершины с положительной кривизной, вклеиваются основаниями два равных треугольника с основаниями, равными длине кратчайшей, и углами при основаниях, равными половинам кривизн этих вершин; затем боковые стороны одного треугольника склеиваются с равными им боковыми сторонами другого. Так можно все вершины с положительной кривизной свести к одной. Затем удаляем вершины отрицательной кривизны. Для этого делаем разрез многогранника по кратчайшей от какой-либо точки A на его границе до какой-либо вершины B с отрицательной кривизной и от нее — еще два разреза по кратчайшим, идущим от B до границы и образующим с кратчайшей AB справа и слева (в точке B) углы, равные π ; в образовавшийся разрез вклеиваем плоский четырехугольник. Очевидно, что при обоих разрезываниях и вклеиваниях площадь многогранника увеличивалась, периметр и положительная часть кривизны не изменялись и, наконец, отрицательная часть кривизны в первом случае не изменялась, а во втором уменьшалась. При этом разрезывания и вклеивания можно проделать так, что отрицательная часть кривизны исчезнет совсем, а положительная сосредоточится в одной вершине и все сведется к поверхности, изометричной конической.

Б. Используя общие теоремы сходимости, касающиеся рассматриваемых величин (некоторые из этих теорем даны в (2, 6)), переносим полученные результаты с многогранников и ломаных на области и кривые в двумерных многообразиях ограниченной кривизны.

3. Теорема 2. Если $\omega_0 = \omega^+ + \sigma < 2\pi$, то кривая L либо не имеет кратных точек, либо состоит из двух ветвей без кратных точек, причем в этом случае L состоит из петли (кривой без кратных точек с совпадающими концами) и одной или двух ветвей, каждая из которых сама по себе не имеет ни кратных точек, ни общих точек с петлей и областью, ограниченной этой петлей.

Следует оговорить, что петля может вырождаться в точку «возврата» на кривой, причем кратные точки кривой сгущаются к этой точке «возврата», где поворот равен π .

Теорема 3. В области с $\omega^+ < 2\pi$ длина всякой кривой ограничена некоторой величиной, зависящей только от значений ρ , σ , ω^+ .

(При $\omega^+ \geq 2\pi$ никакие ограничения невозможны, как показывает пример полусферы, где за кривую L можно взять экватор, обходимый сколько угодно раз.)

Доказательство сводится к выяснению того, что длина s_i всякого отрезка l_i кривой L , который не имеет кратных точек и извивание которого σ_i удовлетворяет неравенству $\omega^+ + \sigma_i < 2\pi$, ограничена. То, что кривую L можно представить в виде суммы конечного числа таких отрезков, следует из того, что L можно разбить на конечное число отрезков l_i , извивания которых будут удовлетворять неравенству $\omega^+ + \sigma_i < 2\pi$, т. е. условиям теоремы 2. Ограниченность же длины отрезка l_i следует из того, что, если область G надрезать по отрезку l_i и подклеить к краям разреза два равнобедренных треугольника с основаниями, равными длине l_i , и углами при основаниях, равными ϵ , а затем боковые стороны одного треугольника склеить с боковыми сторонами другого, то получим область с тем же периметром, положительной частью кривизны, увеличившейся не более чем на $4\epsilon + \sigma_i$,

и площадью, увеличившейся на $1/2 s_i^2 \operatorname{tg} \varepsilon$. Используя то, что по теореме 1 площадь полученной области не больше $\frac{p^2}{2(2\pi - \omega^+ - 4\varepsilon - \sigma_i)}$, получаем

$$s_i^2 \operatorname{tg} \varepsilon < \frac{p^2}{2\pi - \omega^+ - 4\varepsilon - \sigma_i}, \quad \text{и, полагая } \varepsilon = 1/8(2\pi - \omega^+ - \sigma_i), \quad \text{имеем}$$

$s_i < \frac{4p}{2\pi - (\omega^+ + \sigma_i)}$. Суммируя отрезки l_i , получим оценку длины всей кривой L . Более точные оценки дает теорема 4. Теорема 3 имеет, однако, то значение, что из нее следует ограниченность длины и тем самым факт существования максимума длины, что упрощает дальнейшие выводы.

Теорема 4. Если $\omega_0 = \omega^+ + \sigma \leq \pi$, то

$$s \leq \frac{p}{1 + \cos(\omega_0/2)};$$

если же $\pi < \omega_0 < 2\pi$, то

$$s \leq \frac{p}{\sin(\omega_0/2)}.$$

В первом неравенстве знак равенства достигается тогда и только тогда, когда область изометрична плоскому равнобедренному треугольнику с противолежащим основанию углом $\pi - \omega_0$ и суммой сторон, равной p , причем за кривую L нужно взять линию, соответствующую боковым сторонам треугольника (здесь $\omega^+ = 0$, а $\sigma = \omega_0$). Во втором неравенстве знак равенства достигается тогда и только тогда, когда область изометрична поверхности, которая получается склеиванием боковых сторон равнобедренного треугольника с основанием p и углом, противолежащим ему, равным $2\pi - \omega_0$, причем за кривую L нужно принять взятую дважды линию, соответствующую линии склеивания полученной поверхности (здесь $\omega^+ = \omega_0$, а $\sigma = 0$).

Из теоремы 4 следует: 1) квази-геодезическая (т. е. кривая с извиванием, равным нулю) в области с $\omega^+ \leq \pi$ имеет длину $\leq \frac{p}{1 + \cos(\omega^+/2)}$, а в области с $\pi < \omega^+ < 2\pi$ — длину $\leq \frac{p}{\sin(\omega^+/2)}$; 2) если в области с $\omega^+ < 2\pi$ дана кривая с извиванием σ , то, деля ее на дуги с такими извиваниями σ_i , что $\omega^+ + \sigma_i < 2\pi$, и применяя оценки теоремы 4, получим оценку для длины всей кривой через σ , p , ω^+ .

Теорема 5. Пусть $\omega_0 = \omega^+ + \sigma < \pi$ и r обозначает расстояние между концами кривой L . Для длины L тогда имеет место неравенство

$$s = \frac{r}{\cos(\omega_0/2)},$$

причем равенство достигается лишь тогда, когда кривая L вместе с кратчайшей, соединяющей ее концы, ограничивают равнобедренный треугольник с основанием r и углом, противолежащим ему, равным $\pi - \omega_0$.

Если кривая L и соединяющая ее концы кратчайшая M образуют один двуугольник, то это неравенство прямо следует из первого неравенства теоремы 4: достаточно принять за область указанный двуугольник и заметить, что периметр ее $p = s + r$. Вообще же, как можно убедиться из условия $\omega^+ + \sigma < \pi$ (используя теорему 2), кривая L с кратчайшей M образуют (может быть, бесконечную) цепочку двуугольников без общих точек. Применяя к каждому из них приведенный вывод и суммируя результаты, получим указанную оценку.

Из теоремы 5 следует

Теорема 6. Если d — диаметр области и $\omega_0 = \omega^+ + \sigma < \pi$, то

$$s \leq \frac{d}{\cos(\omega_0/2)} \quad \text{и} \quad s < \frac{2d}{\cos(\omega_0/4)}.$$

Первое неравенство следует из теоремы 5, так как $r \leq d$; оно точно при $\omega_0 \leq \frac{2}{3}\pi$, и при этом условии равенство в нем достигается для треугольника, так же как в теореме 5. Но при ω_0 , близком к π , первое неравенство просто теряет смысл, так как при $\omega_0 \rightarrow \pi \cos(\omega_0/2) \rightarrow 0$, тогда как s/d ограничено. Второе неравенство при ω_0 , близких к π , точнее, но оно, однако, неокончательное. Это неравенство получается, если кривую подходящим образом разбить на две дуги и к каждой из них применить теорему 5.

При $\omega_0 > \pi$ оценка длины кривой в зависимости от диаметра области, хотя и не точная, выводится при помощи следующей оценки периметра:

Теорема 7. Если область «выпукла», т. е. ограничена кривой со всюду неотрицательным поворотом со стороны области, то диаметр d и периметр p связаны неравенством

$$p \leq (\pi + \omega^- / 2) d.$$

(Равенство достигается только для таких областей, у которых каждая точка границы имеет диаметрально противоположную $\omega^+ = 0$, а распределение ω^- подчинено некоторым условиям.)

При помощи теорем 4 и 7 может быть доказана:

Теорема 8. Если $\pi \leq \omega_0 = \omega^+ + \sigma < 2\pi$ и область «выпуклая», то

$$s < \left(\pi + \frac{\omega^-}{2} \right) \frac{d}{\sin(\omega_0/2)},$$

а вообще для любой области (и при любой ω^-)

$$s < \frac{3\pi}{2} \frac{d}{\sin(\omega_0/2)}.$$

Задача нахождения максимумов длины кривой при данном диаметре области и при разных значениях $\omega_0 > \frac{2}{3}\pi$ остается нерешенной.

Из теорем 6 и 8 получаются оценки длины кривой в области с $\omega^+ < 2\pi$ при любых σ , для чего достаточно разбить кривую на дуги с достаточно малыми σ .

Отметим еще один простой результат:

Теорема 9. Для диаметра d и периметра p области при $\omega^+ \leq \pi$ имеем $d \leq \frac{1}{2}p$ (и равенство достигается во многих случаях, например, для двуугольника между двумя меридианами на сфере), а при $\pi < \omega^+ < 2\pi$ $d \leq \frac{p}{2 \sin(\omega^+/2)}$ (и равенство достигается только для склеенного боковыми сторонами равнобедренного треугольника с основанием p , боковой стороной d и углом при вершине $2\pi - \omega^+$).

Эта теорема, можно сказать, также касается оценки длин кривых, так как d есть наибольшая длина кратчайшей.

Поступило
15 IX 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Д. Александров, ДАН, 60, № 9 (1948). ² А. Д. Александров, ДАН, 69, № 6 (1949). ³ А. Д. Александров, ДАН, 63, № 4 (1948). ⁴ А. Д. Александров, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, 1948. ⁵ В. В. Стрельцов, Изв. АН КазССР, № 116, сер. астроном., физ., матем. и мех., в. 1 (6) (1952). ⁶ В. А. Залгаллер, Матем. сборн., 26 (68): 2, 205 (1950).