

Д. И. ТАЛАНОВ

**О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ  
ИТЕРАЦИИ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ**

(Представлено академиком М. В. Келдышем 23 IX 1953)

Начало теории итерации функций положено Эйлером. Кенигсу, затем Фату и Жюлиа принадлежат наиболее важные результаты. Настоящая статья дополняет их. Необходимые известные факты мы приводим по (1).

§ 1. Пусть  $R(z)$  — общая рациональная функция и  $z_0$  — точка комплексной плоскости. Последовательность  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ , где  $z_n = R(z_{n-1}) = R_n(z_0)$ , назовем итерационной последовательностью в точке  $z_0$ . Точку  $z_n$  называют последующей  $n$ -го порядка точки  $z_0$ . Точка  $\xi$  называется неподвижной точкой  $n$ -го порядка, если все ее последующие  $\xi_m$ , порядок которых  $m$  есть кратное  $n$ , и только эти последующие совпадают с ней. Итерационная последовательность в неподвижной точке  $\xi$  порядка  $n$  образует цикл  $n$ -го порядка, обозначим его  $(\xi)$ . Возможны циклы (неподвижные точки) трех видов: отталкивающие, притягивающие и индифферентные. Существуют отталкивающие циклы как угодно большого порядка.

Точку  $z$ , все последующие которой попарно различны, мы будем называть подвижной точкой.

Точку называют иррегулярной, если семейство функций  $R_n(z)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , не является в ее окрестности нормальным. Множество  $F$  иррегулярных точек всегда не пусто, оно совершенно и содержит все отталкивающие неподвижные точки, являясь производным для совокупности их множеством.

Точку  $z_{-n}$  называют предшествующей  $n$ -го порядка точке  $z_0$ , если аффикс ее удовлетворяет уравнению  $R_n(z) = z_0$ . Предшествующие любой точке (за исключением притягивающей неподвижной точки) сгущаются к каждой точке множества  $F$ . Предшествующие точкам множества  $F$ , как и последующие точек его, содержатся в нем.

§ 2. Множество неподвижных точек (и точек им предшествующих) счетно. Отсюда, так как множество  $F$  имеет мощность континуума, следует

**Теорема 1.** *Существуют иррегулярные подвижные точки. Множество подвижных иррегулярных точек имеет мощность континуума.*

Например, для функции  $R(z) = z^2$  множеством  $F$  будет множество точек окружности единичного круга. Точки этой окружности, не являющиеся корнями из единицы, суть подвижные иррегулярные точки.

Мы исследуем итерационные последовательности в подвижных иррегулярных точках.

Отметим следующее. Рациональная функция осуществляет непрерывное отображение комплексной плоскости (сферы Римана) на себя.

Итерируя  $R(z)$  при значениях  $z$  в окрестности  $U$ , мы получаем последовательно окрестности  $U_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Какой бы ни была точка  $z$ , существует окрестность  $U$  точки  $z$  такая, что  $U_n$  содержится в данной окрестности точки  $z_n$ . Отсюда следует, в частности:

*Лемма. Последующие частичного предела итерационной последовательности суть ее частичные пределы.*

Все точки цикла, например, являются частичными пределами итерационной последовательности в любой из них. Известно, что точки притягивающего цикла являются, кроме того, частичными пределами итерационной последовательности в подвижной точке из области притяжения. Можно ли сделать аналогичное утверждение о точках отталкивающего цикла и последовательности итераций в подвижной иррегулярной точке? Разрешение этого вопроса завершило бы, в основном, изучение сходимости итераций общей рациональной функции.

§ 3. Окрестность  $U$  неподвижной точки  $\xi$  порядка  $n$  назовем собственной ее окрестностью, если  $U_1, U_2, \dots, U_n$  не пересекаются.

*Теорема 2. Собственная окрестность неподвижной точки  $\xi$  порядка  $n$  для всех  $\mu \leq kn$  при  $k = 1$  не содержит ни одной предшествующей порядка  $m < \mu$  точке  $z_\mu$ ,  $\mu$ -й последующей  $z$ , какова бы ни была точка  $z$  этой окрестности.*

*Доказательство.* Пусть, например, при  $\mu = n$  собственная окрестность  $U$  точки  $\xi$  содержит, наряду с  $z$ , точку  $(z_\mu)_{-(\mu-1)}$ , предшествующую  $\mu - 1$ -го порядка точке  $z_\mu$ . Тогда точка  $z_n$  будет общей для окрестностей  $U_{n-1}$  и  $U_n$ . Однако пересечение этих окрестностей невозможно, по условию.

*Определение.* Точка  $z$  вытесняется циклом ( $\xi$ ) порядка  $n$ , если существует окрестность  $U$  точки  $\xi$ , общая с  $z$ , такая, что  $z_{kn}$  попадает в  $U_{kn}$  последующей  $z$  высшего порядка, не содержась в  $U_{(k-1)n}$ , где  $k = 1, 2, \dots, q$ .

Число  $q$  — наибольшее из возможных значений  $k$  — назовем степенью вытеснения точки  $z$  циклом ( $\xi$ ).

Требование к  $z_{kn}$  быть в  $U_{kn}$  последующей  $z$  высшего порядка равносильно тому, чтобы в окрестности  $U$  не было ни одной предшествующей порядка  $m$  точке  $z_\mu$  при всяком  $m < \mu$  для всех  $\mu \leq kn$ . Поэтому, называя окрестность неподвижной точки  $\xi$ , каждая точка которой вытесняется циклом ( $\xi$ ), окрестностью вытеснения точки  $\xi$ , согласно теореме 2 заключаем:

*Теорема 3. Собственная окрестность неподвижной точки  $\xi$  порядка  $n$  есть окрестность вытеснения, если для любой ее точки  $z$  точка  $\xi$  имеет общую с  $z$  окрестность, не содержащую  $z_n$ .*

§ 4. Пусть  $\xi$  — отталкивающая неподвижная точка  $n$ -го порядка. Если точка  $z$  лежит достаточно близко к  $\xi$ , то существует общая с  $z$  окрестность точки  $\xi$ , не содержащая  $z_n$ . Покажем, что и собственная окрестность точки  $\xi$  существует. Обозначив через  $2r$  наименьшее расстояние между точками цикла ( $\xi$ ), из точки  $\xi$  как центра опишем круг  $K$  радиуса  $r$ . Существует окрестность  $U$  точки  $\xi$  такая, что  $U_n$  содержится в круге  $K$  (см. § 2). Очевидно,  $U$  есть собственная окрестность точки  $\xi$ .

Таким образом, доказана

*Теорема 4. Отталкивающая неподвижная точка имеет область вытеснения.*

Областью вытеснения точки  $\xi$  мы назвали здесь ее окрестность вытеснения, содержащую все ее окрестности вытеснения.

*Теорема 5. Если последовательность попарно различных отталкивающих неподвижных точек сходится, то области вытеснения их стягиваются в точку.*

Доказательство. Порядок членов сходящейся последовательности попарно различных неподвижных точек вместе с их номером безгранично возрастает, и так как неподвижные точки данного порядка лежат вне областей вытеснения точек большего порядка, то теорема верна, ибо множество отталкивающих неподвижных точек плотно в себе.

§ 5. Каждая точка множества  $F$  лежит в области вытеснения, вытесняется циклом какого-нибудь порядка. Число циклов, вытесняющих неподвижную точку или точку, предшествующую неподвижной, конечно.

*Теорема 6. Подвижная иррегулярная точка вытесняется бесконечным множеством отталкивающих циклов.*

Доказательство. Рассмотрим любую окрестность  $U$  иррегулярной подвижной точки  $z$ . Множество точек из  $F$ , принадлежащих  $U$ , покрывается системой областей вытеснения отталкивающих неподвижных точек из  $U$ . Точка  $z$  принадлежит, следовательно, области вытеснения точки из  $U$ . В силу произвольности  $U$  точка  $z$  принадлежит бесконечному множеству областей вытеснения.

*Теорема 7. Множество членов последовательности итераций в иррегулярной подвижной точке плотно в себе и, значит, всюду плотно в совершенной части множества  $F$ .*

Доказательство. Пусть  $z$  — иррегулярная подвижная точка. Рассмотрим сходящуюся последовательность отталкивающих неподвижных точек порядка  $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ , области вытеснения которых содержат точку  $z$ . К точке  $z$  тогда, в силу теоремы 5, сходится последовательность  $z_{n_1}, z_{n_2}, \dots, z_{n_k}, \dots$ . Остается применить лемму.

§ 6. Назовем частичным пределом первого класса изолированную предельную точку множества членов последовательности. Частичным пределом  $p$ -го класса назовем предельную точку множества частичных пределов любого класса  $p' < p$ . Последовательность, множество частичных пределов  $p$ -го класса которой конечно, назовем последовательностью  $p$ -го класса (2).

*Теорема 8. Последовательность итераций либо первого либо бесконечного класса.*

Доказательство. Итерационная последовательность в подвижной точке, не принадлежащей  $F$ , а также в любой неподвижной точке, как и в точке, предшествующей неподвижной, первого класса. Последовательность итераций в подвижной иррегулярной точке, в силу теоремы 7, бесконечного класса. Иных точек нет, так что итерационных последовательностей конечного класса выше первого не существует\*.

Однако теорема 7 содержит утверждение существования частичных последовательностей итераций любого конечного класса.

§ 7. Введем понятие кратной сходимости.

Определение. Последовательность  $p$ -кратно сходится к точке  $z$ , если  $z$  и только точка  $z$  является частичным пределом высшего класса  $p$  этой последовательности. Кратная сходимость есть обобщение сходимости.

*Теорема 9. К отталкивающей неподвижной точке  $p$ -кратно, где  $p$  — любое натуральное число, сходятся частичные последовательности итераций в иррегулярной подвижной точке.*

Доказательство. Дана отталкивающая неподвижная точка  $n$ -го порядка  $\xi^n$  (мы так будем писать теперь неподвижную точку и ее порядок). Пусть

$$\xi^{n_1}, \xi^{n_2}, \dots, \xi^{n_k}, \dots \quad (1)$$

\* Ср. (2), стр. 1132.

сходящаяся к точке  $\xi^n$  последовательность попарно различных отталкивающих неподвижных точек (ясно, что  $n_k \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ ).

Рассмотрим последовательность

$$\xi_{(q_k - \nu)n}^{n_k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $\nu$  есть произвольно взятое натуральное число. Пусть эта последовательность начинается с  $(q_k - \nu)n$ -й последующей той точки  $\xi^{n_k}$ , степень вытеснения  $q_k$  циклом  $(\xi^n)$  которой не меньше числа  $\nu$  (очевидно, что и  $q_k \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ ). Пусть ее подпоследовательность

$$\xi_{(q_{k_\alpha} - \nu)n}^{n_{k_\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

сходится к точке  $z$ .

Будучи пределом последовательности (2) отталкивающих неподвижных точек, имеющих одинаковую степень вытеснения  $\nu$  циклом  $(\xi^n)$ ,  $z$  принадлежит области вытеснения каждой точки этой последовательности, начиная с некоторой, и является поэтому подвижной иррегулярной точкой. Вместе с тем, по теореме 5, к точке  $z$  сходится тогда последовательность

$$z_{n_{k_\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

и так как последующей наименьшего порядка точки  $\xi_{(q_{k_\alpha} - \nu)n}^{n_{k_\alpha}}$ , совпадающей с  $\xi^{n_{k_\alpha}}$ , является точка

$$\xi_{(q_{k_\alpha} - \nu)n + [n_{k_\alpha} - (q_{k_\alpha} - \nu)n]}^{n_{k_\alpha}}$$

то последовательность

$$z_{n_{k_\alpha} - (q_{k_\alpha} - \nu)n}, \quad \alpha = 1, 2, \dots,$$

в силу теоремы 5, сходится к точке  $\xi^n$ .

В процессе итерации, как отмечено и в § 2, рациональная функция (на сфере Римана) ведет себя как непрерывная. Следовательно, обозначая в (3)  $\alpha$  через  $\alpha_1$ , мы можем утверждать, что к точке  $z_{n_{k_\alpha} - (q_{k_\alpha} - \nu)n}$  сходится последовательность

$$z_{n_{k_{\alpha_1}} + n_{k_\alpha} - (q_{k_\alpha} - \nu)n}, \quad \alpha = 1, 2, \dots,$$

а потому к точке  $\xi^n$  2-кратно сходится последовательность

$$z_{n_{k_{\alpha_1}} + n_{k_\alpha} - (q_{k_\alpha} - \nu)n}, \quad \alpha = 1, 2, \dots; \alpha_1 = 1, 2, \dots$$

Имея  $p-1$ -кратно сходящуюся к точке  $\xi^n$  последовательность

$$z_{n_{k_{\alpha_{p-2}}} + \dots + n_{k_{\alpha_1}} + n_{k_\alpha} - (q_{k_\alpha} - \nu)n},$$

$$\alpha = 1, 2, \dots; \alpha_1 = 1, 2, \dots; \dots; \alpha_{p-2} = 1, 2, \dots,$$

мы также имеем и  $p$ -кратно сходящуюся к ней последовательность

$$z_{n_{k_{\alpha_{p-1}}} + n_{k_{\alpha_{p-2}}} + \dots + n_{k_\alpha} - (q_{k_\alpha} - \nu)n},$$

$$\alpha = 1, 2, \dots; \dots; \alpha_{p-2} = 1, 2, \dots; \alpha_{p-1} = 1, 2, \dots$$

Теорема доказана, а вместе с нею и возможность расширить область применимости метода итераций.

Поступило  
22 V 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> П. Монтель, Нормальные семейства аналитических функций, 1936.  
<sup>2</sup> С. П. Пулькин, ДАН, 73, № 6, 1130 (1950).