

В. В. СТАШЕВСКАЯ

**ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА  
ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

(Представлено академиком М. В. Келдышем 23 IX 1953)

В последнее время в ряде работ рассматривались обратные задачи спектрального анализа для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + [\lambda - q(x)]y = 0, \quad (1)$$

заданного на полуинтервале  $[0, a)$ , где  $0 < a \leq \infty$  и функция  $q(x)$  вещественна и суммируема в каждом сегменте  $[0, b]$  при  $b < a$ .

Целью настоящей заметки является рассмотрение обратной задачи для дифференциального оператора вида

$$L[y] = y''(x) = \left[ q(x) + \frac{n(n-1)}{x^2} \right] y(x), \quad (2)$$

заданного на полуоси  $(0, \infty)$ , где  $n$  — целое положительное число, а  $q(x)$  — вещественная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^a |xq(x)|^{2+\varepsilon} dx < \infty \quad (3)$$

при любом  $0 < a < \infty$  и некотором  $\varepsilon > 0$ . Решение уравнения

$$L[y] + s^2y = 0 \quad (4)$$

с условием в нуле

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x, s)}{x^n} = \frac{1}{2^{n-1/2} \Gamma(n+1/2)} \quad (5)$$

в дальнейшем мы будем обозначать через  $y(x, s)$ .

Существует монотонная, ограниченная в каждом конечном интервале функция  $\rho(\lambda)$  (спектральная функция оператора (2)) такая, что при любой функции  $f(x) \in \mathcal{L}^2(0, \infty)$  имеют место формулы обращения

$$f(x) = \text{l. i. m.}_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N E_f(\lambda) y(x, \sqrt{\lambda}) d\rho(\lambda), \quad (6)$$

$$E_f(\lambda) = \text{l. i. m.}_{N \rightarrow \infty} \int_0^N f(x) y(x, \sqrt{\lambda}) dx \quad (\lambda = s^2). \quad (7)$$

При этом имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty |E_f(\lambda)|^2 d\rho(\lambda). \quad (8)$$

Теорема 1. Если операторам  $L_1$  и  $L_2$

$$L_1[y] = y''(x) - \left[ q_1(x) + \frac{n(n-1)}{x^2} \right] y(x),$$

$$L_2[y] = y''(x) - \left[ q_2(x) + \frac{n(n-1)}{x^2} \right] y(x)$$

(функции  $q_1$  и  $q_2$  удовлетворяют условию (3)) соответствуют равные спектральные функции, то  $q_1(x) = q_2(x)$ .

Метод доказательства этой теоремы такой же, как у В. А. Марченко, и основан на применении операторов преобразования, существование которых вытекает из следующей теоремы.

Теорема А. Если функция  $q(x)$  удовлетворяет условию (3), то решение  $y(x, s)$  дифференциального уравнения (4) с условием в нуле (5) представимо в виде

$$y(x, s) = \frac{Vsx J_\nu(sx)}{s^n} + \int_0^x K(x, t) \frac{Vst J_\nu(st)}{s^n} dt \quad (\nu = n - 1/2), \quad (9)$$

причем функция  $K(x, t)$  вещественна и при любом  $a > 0$  удовлетворяет условию

$$\sup_{0 \leq x \leq a} \int_0^x K^2(x, t) dt < \infty \quad (0 < a < \infty)$$

(через  $J_\nu$  здесь, как обычно, обозначена функция Бесселя 1-го рода).

Вопрос о фактическом восстановлении дифференциального уравнения вида (4) по его спектральной функции решается методами, аналогичными методам И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана.

Пусть задана неубывающая функция  $\rho(\lambda)$ , удовлетворяющая условиям:

1. При всяком  $x > 0$  существует интеграл

$$\int_{-\infty}^0 e^{V|\lambda|x} d\rho(\lambda).$$

2. Если положить  $\sigma(\lambda) = -\frac{\lambda^{n+1/2}}{2(n+1/2)} + \rho(\lambda)$  при  $\lambda \geq 0$  и  $\sigma(\lambda) = \rho(\lambda)$  при  $\lambda < 0$ , то функция

$$F(x, u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^x \frac{(V\lambda t)^{1/2} J_\nu(V\lambda t)}{\lambda^{n/2}} dt \right\} \left\{ \int_0^u \frac{(V\lambda t)^{1/2} J_\nu(V\lambda t)}{\lambda^{n/2}} dt \right\} d\sigma(\lambda)$$

имеет непрерывные четвертые производные.

3. Пусть через  $n(x)$  обозначено число точек роста функции  $\rho(\lambda)$ , лежащих в интервале  $(0, x)$ ; тогда

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{n(x)}{Vx} = \infty$$

(в частности достаточно, чтобы множество точек роста функции  $\rho(\lambda)$  имело хотя бы одну конечную предельную точку).

Теорема 2. Если функция  $\rho(\lambda)$  удовлетворяет условиям 1, 2, 3, то существует дифференциальное уравнение вида (4), для которого функция  $\rho(\lambda)$  является спектральной.

Доказательство в существенном ведется так же, как в работе (2).

Доказывается сперва, что при фиксированном  $x$  интегральное уравнение

$$f(x, u) + \int_0^x K(x, t) f(t, u) dt + K(x, u) = 0,$$

где  $f(x, u) = \frac{\partial^2 F(x, u)}{\partial x \partial u}$ , имеет единственное решение  $K(x, u)$ . При этом функция  $K(x, u)$  имеет непрерывные вторые производные. При помощи функции  $K(x, u)$  строится затем система функций  $y(x, s)$  по формуле

$$y(x, s) = \frac{\sqrt{sx} J_\nu(sx)}{s^\nu} + \int_0^x K(x, t) \frac{\sqrt{st} J_\nu(st)}{s^\nu} dt.$$

Далее доказывается, что для функции  $y(x, \sqrt{\lambda})$  имеет место равенство Парсеваля с функцией обложения  $\rho(\lambda)$  и что функция  $y(x, s)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению вида (4) и условию (5) в нуле. При этом функция  $q(x)$  непрерывна на полуоси  $[0, \infty)$ .

Заметим, что условия 1 и 3 необходимы для того, чтобы функция  $\rho(\lambda)$  была спектральной. Вопрос о необходимости условия 2 зависит от поведения функции  $q(x)$  около нуля и ее гладкости, что влияет на свойства функции  $K(x, t)$ . В общем случае этот вопрос не решен.

Поступило  
27 VI 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> В. А. Марченко, ДАН, 72, № 3 (1950). <sup>2</sup> И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., 15, № 4 (1951).