

А. Г. СИГАЛОВ

**ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ
В НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ, ПРЕОБРАЗОВАННЫЕ
К ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ**

(Представлено академиком М. В. Келдышем 23 IX 1953)

В заметке автора ⁽¹⁾ содержалось утверждение о существовании абсолютно-непрерывного в смысле Тонелли решения задач на отыскание абсолютного минимума интеграла

$$\iint_D F(x, y, z, p, q) dx dy, \quad (1)$$

когда допустимые функции принимают заданные значения на границе, а подынтегральное выражение удовлетворяет условию

$$F \geq m(1 + p^2 + q^2)^{\alpha/2}$$

при $p^2 + q^2 \geq L^2$, $m > 0$ и $\alpha > 1$ и при некоторых дополнительных условиях. Доказательство этой теоремы опиралось на теорему о выборе подпоследовательности (теорема 3 ⁽¹⁾), которая, как автор впоследствии обнаружил, оказывается справедливой при $\alpha \geq 2$ *. Следующий пример показывает, что теорема 3 заметки ⁽¹⁾ не верна при $1 < \alpha < 2$.

Пусть

$$f_n(x, y) = \begin{cases} nu & \text{при } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{n}; \\ 1 & \text{при } \frac{1}{n} \leq y \leq 1, \quad 0 \leq |x| \leq y; \\ |y/|x|| & \text{при } 0 \leq y \leq |x|, \quad \frac{1}{n} \leq |x| \leq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Последовательность (2) удовлетворяет всем условиям теоремы 3 ⁽¹⁾ при любом $1 < \alpha < 2$ и не является равномерно непрерывной.

Результаты этой заметки показывают, что при общем предположении $\alpha > 1$ преобразование интеграла (1) к параметрической форме позволяет получить решение $z = f(x, y)$ задачи в непараметрической форме, как непрерывную поверхность T , заданную в параметрической форме. Изучение задачи в параметрической форме и ее непрерывного решения позволяет судить о характере особенностей функции $f(x, y)$. Основная теорема этой заметки включает и случай $\alpha = 1$, но в этом случае решение задачи в параметрической форме, вообще говоря, не определяет решения исходной задачи в непараметрической

* Полное изложение результатов заметки ⁽¹⁾ при условии $\alpha \geq 2$ содержится в гл. I работы ⁽²⁾.

форме. В связи с результатом, имеющим место при $\alpha = 1$, уместно напомнить, что Р. Курант еще в 1927 г. предлагал искать оправдание гипотезы Гильберта о существовании решений регулярных задач вариационного исчисления, допуская в качестве решений поверхности, имеющие участки, параллельные оси Z (4). Известно, что при $\alpha = 1$ задача в непараметрической форме, вообще говоря, не имеет решения.

1. В дальнейшем через x обозначается точка с координатами (x^1, x^2, x^3) , заменяющими координаты (x, y, z) в выражениях, написанных выше.

Поверхность T в параметрической форме, ограниченную жордановой кривой Γ , отнесем к классу A_{par}^α , если T есть предел в смысле Фреше последовательности полиэдров P_n , $n = 1, 2, \dots$, заданных кусочно-линейными функциями

$$P_n: x^3 = f_n(x^1, x^2), \quad (x^1, x^2) \in D_n, \quad (3)$$

и удовлетворяющих следующим условиям:

- а) D_n есть жорданова область, $n = 1, 2, \dots$;
 б) $\iint_{D_n} \left\{ 1 + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x^2} \right)^2 \right\}^{\alpha/2} dx^1 dx^2 \leq L$, $n = 1, 2, \dots$, $\alpha \geq 1$ и L не зависят от n ;

- в) $\frac{1}{\mu(G)} \iint_G \left\{ 1 + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x^2} \right)^2 \right\}^{1/2} dx^1 dx^2 \leq q$ для любой основной области G функции f_n , $n = 1, 2, \dots$; q не зависит от n и G (определение основной области G см. в (1)).

Из рассмотрений статьи (3) легко получаем, что для последовательности полиэдров (3) существуют равномерно непрерывные параметрические представления $x = \varphi_n(u)$, $u \in K = [0, 1; 0, 1]$ с равномерно ограниченными интегралами Дирихле, причем

$$A_{\varphi_n}^3 = \frac{D(\varphi_n^1, \varphi_n^2)}{D(u^1, u^2)} > 0$$

в каждой точке $u \in K$, в которой $A_{\varphi_n}^3$ существует. Вектор-функцию $\varphi(u)$, предельную относительно равномерной сходимости в K для последовательности $\{\varphi_n\}$, назовем «отмеченным» параметрическим представлением поверхности T . Из (3) следует, что отмеченное параметрическое представление абсолютно непрерывно в смысле Тонелли и его интеграл Дирихле $D[\varphi]$ конечен.

Преобразование интеграла

$$(f_n, D_n, F) = \iint_{D_n} F(x^1, x^2, f_n, p_n, q_n) dx^1 dx^2,$$

$p_n = \partial f_n / \partial x^1$, $q_n = \partial f_n / \partial x^2$, к параметрической форме дает равенство

$$(f_n, D_n, F) = \iint_K F_1(\varphi_n, A_{\varphi_n}) du, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $F_1(x, A) = F\left(x, -\frac{A^1}{A^3}, -\frac{A^2}{A^3}\right) A^3$ и A_{φ_n} — вектор, компонентами которого являются якобианы вектор-функции $x = \varphi_n(u)$. Правую часть этого равенства обозначим через (φ_n, K, F_1) .

2. Пусть T — поверхность класса A_{par}^α и $\varphi(u)$, $u \in K$, — какое угодно ее параметрическое представление. Если $x = (x^1, x^2, x^3)$, то положим

$\bar{x} = (x^1, x^2, 0)$. Каждой точке $x_0 \in D = \varphi(\bar{K})$ поставим в соответствие совокупность всех $x \in \varphi(K)$, для которых $\bar{x} = x_0^*$. Получаем функцию $x^3 = f(x^1, x^2)$, $(x^1, x^2) \in \bar{D}$, вообще говоря, неоднозначную. Легко видеть, что функция $f(x^1, x^2)$ не зависит от выбора параметрического представления поверхности T . Класс функций $f(x^1, x^2)$, отвечающих всевозможным поверхностям из класса A_{par}^α , обозначим \bar{A}_{par}^α .

3. Теорема. Пусть $x = \varphi(u)$, $u \in K = [0, 1; 0, 1]$ — отмеченное параметрическое представление поверхности $T \in A_{par}^\alpha$ и пусть $E_0 = E\{A_\varphi^3(u) = 0, A_\varphi(u) \neq 0\}$.

Тогда:

1) $\mu(E_0) = 0$.

2) Функция $f(x^1, x^2)$, $(x^1, x^2) \in \bar{D} = \varphi(K)$, отвечающая поверхности T по п. 2, почти всюду в D совпадает с функцией, абсолютно-непрерывной по x^2 для почти всех x^1 , и почти всюду в D с функцией, абсолютно-непрерывной по x^1 для почти всех x^2 .

3) $df/dx^1 = -A_\varphi^1/A_\varphi^3$; $df/dx^2 = -A_\varphi^2/A_\varphi^3$ для почти всех $u \in K$, в которых вектор A_φ определен и $A_\varphi^3 \neq 0$ в правых частях и для соответствующих им точек $x = \varphi(u)$ в левых частях.

4) Пусть функция $F(x, p, q)$ определена и непрерывна при $(x^1, x^2) \in \bar{D}$, $|x^3| \leq |x_0^3|$ и при любых p и q вместе со своими производными F_p, F_q и удовлетворяет условию

$$F \geq m(1 + p^2 + q^2)^{\alpha/2} + B \quad (4)$$

для всех x, p, q , для которых она определена; m, α и B не зависят от x, p, q , причем $m > 0$ и $\alpha > 1$; $|f(x^1, x^2)| \leq |x_0^3|$ при $(x^1, x^2) \in \bar{D}$.

Тогда $(f, D, F) = (\varphi, K, F_1)$.

4. Основная теорема. Пусть функция $F(x, p, q)$ удовлетворяет требованиям п. 3, 4) и, сверх того удовлетворяет условию квази-регулярности: $\mathcal{G}(x, p, q, \bar{p}, \bar{q}) \geq 0$ для всех значений аргументов, для которых F определена. Кроме подинтегральных выражений, удовлетворяющих неравенству (4) (случай $\alpha > 1$), будем также рассматривать выражения F , удовлетворяющие неравенству

$$m\sqrt{1 + p^2 + q^2} \leq F \leq M\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

для всех x, p, q , для которых F определена; M и m не зависят от x, p, q (случай $\alpha = 1$).

Пусть далее функция $\Psi(x^1, x^2)$ определена и непрерывна на границе D' области D .

Допустимые функции f задачи на минимум интеграла (f, D, F) подчинены следующим требованиям:

A. $f \in A_{par}^\alpha$, причем $|f(x^1, x^2)| < |x_0^3|$ при $(x^1, x^2) \in D$.

B. Значения $\Psi(x^1, x^2)$ являются для f граничными в следующем смысле: при любых $(x^1, x^2) \in D'$ точка $(x^1, x^2, \Psi(x^1, x^2))$ лежит на граничной кривой поверхности $T \in A_{par}^\alpha$, определяющей функцию f .

C. $(f, D, F) < +\infty$.

Поверхности $T: x = \varphi(u)$, $u \in K$, определяющие всевозможные допустимые функции f , будем считать допустимыми поверхностями

* Вектор-функцию $\bar{\varphi}(u)$ определяем компонентами $(\varphi^1, \varphi^2, 0)$, где $(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$ — компоненты вектор-функции $\varphi(u)$.

ми соответствующей задачи в параметрической форме, т. е. задачи на минимум интеграла (φ, K, F_1) . Подчиним допустимые функции f и поверхности φ дополнительному требованию:

D. Существует последовательность кусочно-линейных функций $f_n(x^1, x^2)$, $(x^1, x^2) \in D_n$, определяющая φ и f по п. 1, которая, кроме условий а), б), с) п. 1, удовлетворяет также условию $(\varphi_n, K, F_1) \rightarrow (\varphi, K, F_1)$, $n \rightarrow \infty$.

В силу теоремы п. 3 это условие при $\alpha > 1$ можно записать также в виде $(f_n, D_n, F) \rightarrow (f, D, F)$.

Тогда при $\alpha > 1$ задачи на отыскание минимума интегралов (f, D, F) и (φ, K, F_1) равносильны и обе задачи имеют решение, если существует по крайней мере одна допустимая функция (поверхность). При этом $(f, D, F) = (\varphi, K, F_1)$ для любой допустимой функции f , где $T: x = \varphi(u)$ — соответствующая поверхность.

При $\alpha = 1$ решение задачи на отыскание минимума интеграла (φ, K, F_1) существует, если существует по крайней мере одна допустимая поверхность.

Поступило
27 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Г. Сигалов, ДАН, 73, № 5 (1950). ² А. Г. Сигалов, Тр. Московск. матем. об-ва, 2, 201 (1953). ³ А. Г. Сигалов, Усп. матем. наук, 6, № 2, 16 (1951). ⁴ R. Courant, Math. Ann., 5, 97, 711 (1927).