Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 3

МАТЕМАТИКА

Ф. И. КАРПЕЛЕВИЧ

ПОВЕРХНОСТИ ТРАНЗИТИВНОСТИ ПОЛУПРОСТОЙ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ СИММЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 IX 1953)

Пусть $\mathfrak{M}$ — симметрическое риманово пространство с отрицательной кривизной. Картаном показано [1,2], что $\mathfrak{M}$ можно рассматривать как однородное пространство, у которого группа движений $\mathfrak{G}$ полупроста, а стационарная подгруппа $\mathfrak{H}$ является максимальной компактной подгруппой группы $\mathfrak{G}$. Пусть G — алгебра Ли группы $\mathfrak{G}$ и $\varphi(g, h)$ $(g \in G,\ h \in G)$ — инвариантная билинейная форма Картана. Пусть, далее, H — подпространство G. Множество X элементов из G будем называть ортогональным дополнением к H, если $\varphi(x, h) = 0$ для любых x и h из X и H и если любой x, для которого $\varphi(x, h) = 0$ при всех h из H, принадлежит X.

Предположим теперь, что $\mathfrak{H}$ — стационарная подгруппа точки M. Подалгебру H, отвечающую подгруппе $\mathfrak{H}$, будем называть стационарной подалгеброй точки M. Пусть X — ортогональное дополнение к H.

Из [1,2] следует, что:

1) $G = H \dotplus X$ и квадратичная форма $\varphi(g, g)$ отрицательно определена на H и положительно определена на X.

2) Для того чтобы кривая γ, проходящая через точку M, была геодезической, необходимо и достаточно, чтобы γ была траекторией однопараметрической подгруппы, которая порождена инфинитезимальным преобразованием из X.

3) Если точка M переводится в точку M' бесконечно малым преобразованием $e + x\,dt$, где $x \in X$, то форму $\varphi(g, h)$ можно выбрать так, что будет выполняться свойство 1 и квадрат расстояния от M до M' будет равен $\varphi(x, x)\,dt^2$.

Пусть $\tilde{\mathfrak{G}}$ — полупростая подгруппа $\mathfrak{G}$ и $\tilde{\mathfrak{H}}$ — максимальная компактная подгруппа $\tilde{\mathfrak{G}}$. Пусть $\tilde{G}$ и $\tilde{H}$ — подалгебры, отвечающие подгруппам $\tilde{\mathfrak{G}}$ и $\tilde{\mathfrak{H}}$, а $\tilde{X}$ — ортогональное дополнение к $\tilde{H}$ в $\tilde{G}$. Будем говорить, что $\tilde{G}$ (соответственно $\tilde{\mathfrak{G}}$) канонически вложено в G (соответственно в $\mathfrak{G}$), если найдется максимальная компактная подалгебра H алгебры G такая, что $\tilde{H} \subset H$ и $\tilde{X} \subset X$, где X — ортогональное дополнение к H.

Лемма 1. *Пусть $\tilde{G}$ канонически вложено в G и пусть $\tilde{H} \subset H$, а $\tilde{X} \subset X$. Если M — точка, для которой стационарной подалгеброй является H, а $\mathfrak{S}$ — поверхность транзитивности группы $\tilde{\mathfrak{G}}$, содержащая точку M, то $\mathfrak{S}$ является вполне геодезическим многообразием, т. е. многообразием таким, что любая геодезическая, касающаяся $\mathfrak{S}$, целиком принадлежит $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что любая геодезическая, касающаяся $\mathfrak{S}$ в точке M, целиком принадлежит $\mathfrak{S}$. Последнее следует из свойства 2.

Пусть H — стационарная подалгебра точки M. Пусть, далее, $g \in G$. Представим g в виде $g = x + h$ $(x \in X,\ h \in H)$. Если M' — точка, в которую переводится M бесконечно малым преобразованием $e + g\,dt$, то для расстояния $\rho(M, M')$ от M до M' имеем (свойство 3)

$$\rho^2(M, M') = \varphi(x, x)\,dt^2. \tag{1}$$

Так как $\varphi(x, h) = 0$, то $\varphi(g, g) = \varphi(x, x) + \varphi(h, h)$. Поэтому из (1)

$$\rho(M, M') = \sqrt{\varphi(g, g) - \varphi(h, h)}\,dt, \tag{2}$$

где h — проекция g на H.

Лемма 2. *Пусть $\widetilde{\mathfrak{G}}_1$ и $\widetilde{\mathfrak{G}}_2$ — полупростые подгруппы группы $\mathfrak{G}$ и пусть $\widetilde{\mathfrak{G}}_2 \subset \widetilde{\mathfrak{G}}_1$. Если $\widetilde{\mathfrak{G}}_1$ и $\widetilde{\mathfrak{G}}_2$ канонически вложены в $\mathfrak{G}$, то $\widetilde{\mathfrak{G}}_2$ канонически вложено в $\widetilde{\mathfrak{G}}_1$.*

Доказательство. Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{H}}_i$ $(i = 1, 2)$ максимальную компактную подгруппу группы $\widetilde{\mathfrak{G}}_i$, через $\widetilde{G}_i$ и $\widetilde{H}_i$ — подалгебры, отвечающие подгруппам $\widetilde{\mathfrak{G}}_i$ и $\widetilde{\mathfrak{H}}_i$ и через $\widetilde{X}_i$ — ортогональное дополнение к $\widetilde{H}_i$ в $\widetilde{G}_i$. Пусть H_i — максимальная компактная подалгебра алгебры такая, что $\widetilde{H}_i \subset H_i$ и $\widetilde{X}_i \subset X_i$, где X_i — ортогональное дополнение к H_i. Пусть M_i — точка, для которой H_i является стационарной подалгеброй, а $\mathfrak{S}_i$ — поверхность транзитивности подгруппы $\widetilde{\mathfrak{G}}_i$, содержащая точку M_i. В силу леммы 1 $\mathfrak{S}_i$ является вполне геодезическим многообразием. В односвязном римановом пространстве с отрицательной кривизной из любой точки на любое вполне геодезическое многообразие можно и притом единственным образом опустить геодезический перпендикуляр ([3]). Пусть γ — перпендикуляр, опущенный из точки M_2 на поверхность $\mathfrak{S}_1$, а A — точка пересечения γ с $\mathfrak{S}_1$. Можно считать, что точка A совпадает с точкой M_1. Общий случай сводится к этому заменой $\widetilde{\mathfrak{H}}_1$ на $g^{-1}\widetilde{\mathfrak{H}}_1 g$, где g — элемент из $\widetilde{\mathfrak{G}}_1$, переводящий точку A в точку M_1. Пусть $\mathfrak{h} \in \widetilde{\mathfrak{H}}_2$. Так как $\widetilde{\mathfrak{G}}_2 \subset \widetilde{\mathfrak{G}}_1$, то $\mathfrak{S}_1$ инвариантно для $\mathfrak{h}$. С другой стороны, $\widetilde{H}_2$ содержится в H_2 — стационарной подалгебре точки M_2, следовательно, точка M_2 переходит в себя при движении $\mathfrak{h}$. Поэтому, в силу единственности перпендикуляра, точка M_1 также переходит в себя при движении $\mathfrak{h}$. Отсюда уже следует, что $\widetilde{H}_2 \subset \widetilde{H}_1$. Покажем теперь, что $\widetilde{X}_2 \subset \widetilde{X}_1$. Для этого достаточно доказать, что $\widetilde{X}_2 \subset X_1$, потому что, как легко видеть, $\widetilde{X}_1 = X_1 \cap \widetilde{G}_1$. Пусть $x \in \widetilde{X}_2$ и M_i' $(i = 1, 2)$ — точка, в которую переводится точка M_i бесконечно малым преобразованием $e + x\,dt$. Так как $\widetilde{\mathfrak{G}}_2 \subset \widetilde{\mathfrak{G}}_1$, то $M_1' \in \mathfrak{S}_1$ и γ' — геодезическая, соединяющая точки M_1' и M_2', получающаяся из γ преобразованием $e + x\,dt$, — является перпендикуляром к $\mathfrak{S}_1$, опущенным из точки M_2'. При этом очевидно, что длины γ и γ' равны. Согласно ([3]) в односвязном римановом пространстве с отрицательной кривизной для всякого геодезического треугольника с длинами сторон λ, μ, ν имеет место неравенство

$$\lambda^2 \geqslant \mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu\cos\varphi, \tag{3}$$

где φ — угол между геодезическими μ и ν.

Применяя (3) к прямоугольному треугольнику $M_1 M_1' M_2'$, получим $c^2 \geqslant a^2 + b^2$ и $b^2 \geqslant a^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi_1$ (обозначения см. на рис. 1). Отсюда

$$a \leqslant c\cos\varphi_1. \tag{4}$$

Применяя (3) к треугольнику $M_1M_2M_2'$, найдем, что $d^2 \geqslant b^2 + c^2 - 2bc\cos\varphi_2 \geqslant c^2\sin^2\varphi_2$, следовательно:

$$d \geqslant c\sin\varphi_2. \tag{5}$$

Так как геодезические M_1M_2, M_1M_1' и M_1M_2' образуют трехгранный угол с вершиной в точке M_1 и так как угол между геодезическими M_1M_2 и M_1M_1' прямой, то $\varphi_1 + \varphi_2 \geqslant \pi/2$, $\varphi_2 - \varphi_1 \leqslant \pi/2$. Отсюда $\sin\varphi_2 \geqslant \cos\varphi_1$. Вместе с (4) и (5) это дает, что

$$a \leqslant d. \tag{6}$$

Найдем теперь a и d из равенства (2). Полагая $g = x$ и замечая, что $h = 0$, так как $x \in \tilde{X}_2 \subset X_2$, получим

$$d = \rho(M_2, M_2') = \sqrt{\varphi(x, x)}\,dt. \tag{7}$$

С другой стороны, если h_1 — проекция x на H_1, то

$$a = \rho(M_1, M_1') = \sqrt{\varphi(x, x) - \varphi(h_1, h_1)}\,dt. \tag{8}$$

Из свойства 1 имеем, что $\varphi(h_1, h_1) \leqslant 0$, причем знак равенства достигается только при $h_1 = 0$. Вместе с (6), (7) и (8) это дает, что $h_1 = 0$ и, значит, $x \in X_1$.

Теорема 1. *Если $\tilde{\mathfrak{G}}$ — полупростая подгруппа группы $\mathfrak{G}$, то $\tilde{\mathfrak{G}}$ канонически вложено в $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. Из леммы 2 следует, что для доказательства теоремы достаточно найти полупростую группу $\mathfrak{G}^*$ такую, чтобы $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}^*$, причем и $\mathfrak{G}$ и $\tilde{\mathfrak{G}}$ были бы канонически вложены в $\mathfrak{G}^*$. В качестве $\mathfrak{G}^*$ можно взять комплексную оболочку группы $\mathfrak{G}$. При этом группу $\mathfrak{G}^*$ мы можем рассматривать как группу с удвоенным числом вещественных параметров. Покажем, что $\mathfrak{G}$ и $\tilde{\mathfrak{G}}$ канонически вложены в $\mathfrak{G}^*$. Действительно, алгебра G является вещественной формой комплексной алгебры G^*, отвечающей комплексной группе $\mathfrak{G}^*$. Поэтому [4,5] найдется максимальная компактная подалгебра H^* алгебры G^* и два подпространства H и Y алгебры H^* такие, что $H^* = H \dotplus Y$, $G = H \dotplus iY$. Легко видеть, что H является максимальной компактной подалгеброй G, а iY — ортогональным дополнением к H. Но если алгебру G^* рассматривать как алгебру над полем вещественных чисел, то ортогональное дополнение к H^* в G^* совпадает с пространством iH^*. Отсюда и следует, что G канонически вложено в G^*.

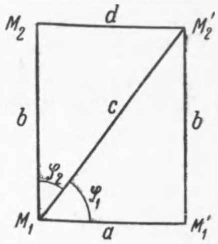

Рис. 1

Точно так же алгебра $\tilde{G}$ канонически вложена в алгебру $\tilde{G}^*$, где $\tilde{G}^*$ — комплексная оболочка $\tilde{G}$. Поэтому достаточно доказать, что $\tilde{\mathfrak{G}}^*$ канонически вложена в G^*. Пусть $\tilde{H}^*$ — максимальная компактная подалгебра комплексной алгебры $\tilde{G}^*$ и пусть H^* — максимальная компактная подалгебра комплексной алгебры G^*, содержащая $\tilde{H}^*$. Так как $\tilde{H}^* \subset H^*$, то и $i\tilde{H}^* \subset iH^*$, следовательно, рассматривая алгебры $\tilde{G}^*$ и G^* как алгебры над полем вещественных чисел, получим, что ортогональное дополнение к $\tilde{H}^*$ в $\tilde{G}^*$ содержится в ортогональном дополнении к H^* в G^*.

Теорема 2. *Пусть $\tilde{\mathfrak{G}}$ — полупростая подгруппа группы движений симметрического риманова пространства $\mathfrak{M}$ с отрицательной* *кривизной. Среди поверхностей транзитивности подгруппы $\mathfrak{G}$, на которые распадается $\mathfrak{M}$, существует хотя бы одно вполне геодезическое многообразие.*

Эта теорема непосредственно следует из теоремы 1 и леммы 1.

Поступило
26 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Cartan, Bull. Soc. Math., **54**, 214, (1926); **55**, 44 (1927). [2] E. Cartan, J. Math. pures et appl., **8**, **1** (1929). [3] Э. Картан, Геометрия римановых пространств, 1936. [4] E. Cartan, Ann. Ec. Norm. Sup., 3-me sér., 31, 263 (1914). [5] Ф. Р. Гантмахер, Матем. сборн., **5** (47), 217 (1939).