

Л. И. КАМЫНИН

**ПОСТРОЕНИЕ ЯВНОГО РЕШЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 22 IX 1953)

Решение ряда дифференциальных уравнений с частными производными методом конечных разностей можно свести к рассмотрению бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{dU_n}{dt} = \sum_{\alpha=-r}^r C_\alpha U_{n+\alpha}, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

В заметке строится явное решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$U_n(0) = \varphi(n). \quad (2)$$

Теорема. Решение системы (1) (C_k — постоянные, $k = -r, \dots, r$) с начальными данными (2) имеет вид:

$$U_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi(n+k)}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikhz} \exp\left\{t \sum_{\alpha=-r}^r C_\alpha e^{i\alpha z}\right\} dz + \\ + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n-k)}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikhz} \exp\left\{t \sum_{\alpha=-r}^r C_\alpha e^{i\alpha z}\right\} dz, \quad (3)$$

если функция $\varphi(n)$ удовлетворяет условию

$$|\varphi(n)| \leq L \left[(1 - \varepsilon) \frac{|n|}{r} \right]!, \quad (4)$$

где $0 < \varepsilon \leq 1$ и $L > 0$ — постоянные.

Всякое решение $V_n(t)$ системы (1) с теми же начальными данными (2) совпадает с (3), если только

$$|V_n(t)| = O\left(\left[(1 - \delta) \frac{|n|}{r}\right]!\right), \quad (5)$$

где $0 < \delta \leq 1$, $|t| \leq T$.

Если оценку (5) заменить на

$$|V_n(t)| = O\left(\left[(1 + \delta) \frac{|n|}{r}\right]!\right), \quad (6)$$

то существуют системы (1), для которых единственность в классе функций (6) не наблюдается.

Доказательство. Непосредственная подстановка показывает, что (3) является формальным решением системы (1), (2). Теперь необходимо доказать: а) равномерную сходимость по t на любом отрезке $[0, T]$ как ряда (3), так и ряда, полученного из (3) формальным дифференцированием по t ; б) выполнение оценки (5) для $U_n(t)$.

Предварительно укажем на равенство

$$A_{\pm n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\pm inz} \exp \left\{ t \sum_{\alpha=-r}^r C_\alpha e^{iaz} \right\} dz = \quad (7)$$

$$= \frac{(\pm t)^{\left[\frac{n}{r}\right]} \left[\frac{n}{r}\right]}{2\pi} \prod_{j=1}^{\left[\frac{n}{r}\right]} \sum_{\alpha_j=-r}^r \frac{\alpha_j C_{\alpha_j}}{n \pm (\alpha_1 + \dots + \alpha_{j-1})} \int_0^{2\pi} e^{i(\pm n + \alpha_1 + \dots + \alpha_j)z} \exp \left\{ t \sum_{\alpha=-r}^r C_\alpha e^{iaz} \right\} dz,$$

полученное $\left[\frac{n}{r}\right]$ -кратным интегрированием по частям интеграла слева. Из (7) следует оценка

$$|A_{\pm n}| \leq \frac{(tr(2r+1)C)^{\left[\frac{n}{r}\right]} \exp\{t(2r+1)C\}}{|n|(|n|-r)\dots(|n| - (\left[\frac{n}{r}\right]-1)r)}. \quad (8)$$

Если $r(2r+1) = M$, $t(2r+1)C \leq K$, то из оценок (4), (8) вытекает, что (3) мажорируется рядом (при $n \geq 0$)

$$Le^K \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[(1-\varepsilon)\frac{n+k}{r}]! (tM)^{\left[\frac{k}{r}\right]}}{\left[\frac{k}{r}\right]!} + \sum_{k=1}^n \frac{[(1-\varepsilon)\frac{n-k}{r}]!}{\left[\frac{k}{r}\right]!} (tM)^{\left[\frac{k}{r}\right]} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{[(1-\varepsilon)\frac{k-n}{r}]!}{\left[\frac{k}{r}\right]!} (tM)^{\left[\frac{k}{r}\right]} \right) \quad (9)$$

и рядом (при $n < 0$)

$$2Le^K \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[(1-\varepsilon)\frac{k-n}{r}]!}{\left[\frac{k}{r}\right]!} (tM)^{\left[\frac{k}{r}\right]}. \quad (10)$$

Первый и третий члены (9) соответственно меньше выражений

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}n\right]} \frac{[(1-\varepsilon)\frac{n+k}{r}]!}{\left[\frac{k}{r}\right]!} (tM)^{\left[\frac{k}{r}\right]} + \left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1\right) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(tM)^{\frac{m}{\varepsilon} + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}n}}{m!} \quad (11)$$

и

$$\left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1\right) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(tM)^{\frac{m}{\varepsilon} - \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}n}}{m!}. \quad (12)$$

Аналогичная оценка имеет место и для (10). При помощи выведенных оценок легко доказать утверждение а), откуда следует, что (3)

есть решение системы (1), (2). Докажем утверждение б). Легко видеть, что ряды (10), (12) и второе слагаемое в (11) удовлетворяют оценке (5), где $0 < \delta < \varepsilon$ и $|t| \leq T$. Ввиду (10), (11), (12) осталось показать, что

$$B_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} n\right]} \frac{\left[(1-\varepsilon) \frac{n+k}{r}\right]!}{\left[\frac{k}{r}\right]!} (tM)^{\left[\frac{k}{r}\right]} = O\left(\left[(1-\delta) \frac{|n|}{r}\right]!\right), \quad (13)$$

где $0 < \delta < \varepsilon$.

Найдем, при каком x выражение $\frac{\Gamma\left((1-\varepsilon) \frac{n+x}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{r}\right)}$ будет максимальным, для чего решим уравнение

$$\frac{\Gamma\left((1-\varepsilon) \frac{n+x+1}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{r}\right)} = \frac{\Gamma\left((1-\varepsilon) \frac{n+x}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{r}\right)} \quad (14)$$

(без нарушения общности можно считать $n \geq 0$).

Ввиду асимптотического равенства $\Gamma(x+\alpha) \approx \Gamma(x)x^\alpha$, следующего из формулы Стирлинга при больших x и малых α , (14) можно заметить уравнением

$$\beta(n+x)^{1-\varepsilon} = x, \quad \text{где } \beta = r^\varepsilon(1-\varepsilon)^{1-\varepsilon}.$$

Если $y(x) = \beta(n+x)^{1-\varepsilon}$, $y_1(x) = \beta n^{1-\varepsilon} + \frac{\beta(1-\varepsilon)x}{n^\varepsilon}$, $y_2(x) = \beta n^{1-\varepsilon} + \frac{\beta(1-\varepsilon)x}{\left(n + \frac{\beta n^{1-\varepsilon}}{1 - \frac{\beta(1-\varepsilon)}{n^\varepsilon}}\right)^\varepsilon}$, $y(x_{\max}) = x_{\max}$, $y_1(\bar{x}) = \bar{x}$ и $y_2(\underline{x}) = \underline{x}$, то имеют

место неравенства:

$$y_1(x) \geq y(x) \quad \text{при } x \geq 0, \quad \text{откуда } \bar{x} > x_{\max}; \quad (15)$$

$$y_2(x) \leq y(x) \quad \text{при } 0 \leq x \leq \bar{x}, \quad \text{откуда } x_{\max} > \underline{x}. \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует

$$\frac{\beta n}{n^\varepsilon - \frac{\beta(1-\varepsilon)}{\left(1 + \frac{\beta}{n^\varepsilon - \beta(1-\varepsilon)}\right)^\varepsilon}} < x_{\max} < \frac{\beta n}{n^\varepsilon - \beta(1-\varepsilon)},$$

т. е.

$$x_{\max} = \frac{\beta n}{n^\varepsilon - \frac{\beta(1-\varepsilon)}{1 + \gamma_n}},$$

где $\gamma_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ и фиксированном ε .

Итак, справедлива оценка

$$\frac{\left[(1-\varepsilon) \frac{n+x_{\max}}{r}\right]!}{\left[\frac{x_{\max}}{r}\right]!} \leq \left[\frac{1-\varepsilon}{r} n \left(1 + \frac{\beta}{n^\varepsilon - \frac{\beta(1-\varepsilon)}{1 + \gamma_n}}\right)\right]^{\frac{n}{r} \left(1 - \varepsilon \left(1 + \frac{\beta}{n^\varepsilon - \frac{\beta(1-\varepsilon)}{1 + \gamma_n}}\right)\right)} = C_n. \quad (17)$$

Из (17) вытекает

$$B_n \leq \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} n \right] (TM)^{\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} n \right]} C_n = O\left(\left[(1-\delta) \frac{|n|}{r} \right]! \right)$$

при $0 < \delta < \varepsilon$ и n достаточно большом, ибо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta}{n^\varepsilon \frac{\beta(1-\varepsilon)}{1+\gamma_n}} = 0.$$

Утверждение б) доказано.

Единственность построенного решения (3) в классе функций (5) следует из теоремы единственности, содержащейся в (1).

В работе (1) указана также система вида (1), (2), для которой нет единственности решения в классе функций (6).

Следствие. Решение неоднородной системы

$$\frac{dU_n}{dt} = \sum_{\alpha=-r}^r C_\alpha U_{n+\alpha} + f_n(t), \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots,$$

удовлетворяющее нулевым начальным данным, имеет вид

$$U_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{t+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_{n+k}(\tau) \int_0^{2\pi} e^{-ikz} \exp\left\{ (t-\tau) \sum_{\alpha=-r}^r C_\alpha e^{i\alpha z} \right\} dz d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{t+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_{n-k}(\tau) \int_0^{2\pi} e^{ikz} \exp\left\{ (t-\tau) \sum_{\alpha=-r}^r C_\alpha e^{i\alpha z} \right\} dz d\tau,$$

если только $f_n(t)$ непрерывна и

$$|f_n(t)| = O\left(\left[(1-\varepsilon) \frac{|n|}{r} \right]! \right) \quad \text{при } 0 < \varepsilon \leq 1, |t| \leq T.$$

Поступило
21 IX 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. И. Камынин, Изв. АН СССР, сер. матем., 17, 163 (1953).