Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. В. ЕФИМОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 23 IX 1953)

Мы рассматриваем поверхность, которая определяется в декартовых прямоугольных координатах уравнением вида $z = f(x, y)$ при всех значениях x, y. Эту поверхность мы предполагаем всюду регулярной и имеющей во всех точках отрицательную гауссову кривизну. При этих предположениях функция $z = f(x, y)$ также должна быть всюду регулярной, в частности, величины $p = f'_x(x, y)$ и $q = f'_y(x, y)$ должны быть конечными (так как поверхность отрицательной кривизны не может однозначно проектироваться на плоскость x, y, если какая-нибудь касательная плоскость этой поверхности параллельна оси Oz). Некоторыми геометрами ставился вопрос: возможна ли такая поверхность, если гауссова кривизна ее всюду меньше некоторого отрицательного числа? Этот вопрос решается в настоящей заметке, именно, утверждается следующая теорема:

Теорема. *Если поверхность $z = f(x, y)$ регулярна при всех значениях x, y, то гауссова кривизна ее не может оставаться меньшей какого-либо отрицательного числа.*

Более общий вопрос о поверхности, заданной параметрическими уравнениями, решен Гильбертом для случая, когда кривизна постоянна ([1]).

В аналитической постановке теорема означает следующее: если $K = K(x, y)$ — данная функция, меньшая некоторого отрицательного числа, то каждое решение уравнения

$$rt - s^2 = K(1 + p^2 + q^2)^2 \tag{1}$$

имеет особенность (не может быть всюду регулярным). Заметим, что если $K(x, y)$ больше некоторого положительного числа, то подобное утверждение доказывается очень просто. Доказательство можно основать на том, что поверхность $z = f(x, y)$ положительной кривизны однозначно отображается на сферу по параллельности нормалей; следовательно, если $K \geqslant 1/a > 0$, то площадь такой поверхности $\leqslant 2\pi a^2$. Подобные рассуждения для поверхностей отрицательной кривизны неприменимы. В этом убеждает пример поверхности $z = e^x \sin y$, которая имеет всюду отрицательную кривизну, но по параллельности нормалей отображается на сферу неоднозначно. Гауссова кривизна этой поверхности

$$K = -\frac{e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2}$$

остается меньшей отрицательного числа в бесконечной полосе между двумя прямыми, параллельными оси Oy.

Ниже сообщаются основные этапы доказательства теоремы (для простоты верхняя грань кривизны предполагается равной -1).

1. Пусть $z=f(x, y)$ — регулярная на всей плоскости функция, которая удовлетворяет уравнению (1), где $K(x, y) \leqslant -1$.

Для удобства выкладок положим $K=-\varkappa^2$, считая $\varkappa$ положительным; имеем:

$$\varkappa \geqslant 1. \tag{2}$$

Рассмотрим семейство характеристик уравнения (1):

$$r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2=0, \tag{3}$$

определяемых решением $z=f(x, y)$. В силу (1) $rt-s^2<0$, следовательно, в каждой точке характеристические направления вещественны и различны. Угловые коэффициенты характеристических направлений определяются формулой

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-s \pm \sqrt{s^2-rt}}{t} \tag{4}$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r}{-s \mp \sqrt{s^2-rt}}. \tag{5}$$

Уравнения (4) и (5) равносильны, и правые части их не могут одновременно терять определенность. Таким образом, мы можем различать характеристические направления по выбору знаков в правых частях (4) и (5). Условимся называть первым то характеристическое направление, которое соответствует выбору знака плюс в формуле (4); соответственно будем называть первым то семейство характеристик, которое состоит из линий тока первых направлений.

2. Согласно (4) вдоль характеристик имеем

$$s\,dx+t\,dy=\pm\sqrt{s^2-rt}\,dx;$$

отсюда и вследствие (1)

$$dq=\pm\varkappa(1+p^2+q^2)\,dx. \tag{6}$$

Возьмем какую-нибудь точку $M_0(x_0, y_0)$, в которой, например, первое характеристическое направление не параллельно оси Oy. Через M_0 проходит (одна) характеристика первого семейства, причем некоторая дуга этой характеристики расположена справа от M_0 и однозначно проектируется на ось Ox. Обозначим через M_0M_1 наибольшую (либо бесконечную) дугу такого вида. Пусть x_1 — абсцисса точки M_1; имеем $x_1>x_0$. Будем двигаться по дуге M_0M_1 слева направо. Тогда $dx>0$, и из (6) с учетом (2) находим

$$dq \geqslant (1+q^2)\,dx. \tag{7}$$

Обозначим значение функции q в точке M_0 через q_0 и положим $q_0=\operatorname{tg}(x_0+c)$, считая $-\pi/2<x_0+c<+\pi/2$. Вследствие (7)

$$d\,[\operatorname{arc\,tg} q-(x+c)] \geqslant 0; \tag{8}$$

так как $\operatorname{arc\,tg} q_0-(x_0+c)=0$, то согласно (8) должно быть $\operatorname{arc\,tg} q-(x+c) \geqslant 0$ для всех x на отрезке $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$. На основании изложенного заключаем: при движении точки по дуге M_0M_1 в правую сторону функция q монотонно (строго) возрастает, причем

$$q \geqslant \operatorname{tg}(x+c). \tag{9}$$

Из (9) следует, что $x_1+c<+\pi/2$, так как в противном случае функция q должна обратиться в бесконечность в некоторой конечной точке, что исключено условием регулярности функции z.

3. Если точка M_1 является конечной (т. е. не бесконечно удаленной), то в ней первое характеристическое направление параллельно оси Oy, следовательно, второе направление не может быть параллельным этой оси. Поэтому через M_1 проходит одна характеристика второго семейства, причем некоторая дуга этой характеристики, расположенная слева от M_1, однозначно проектируется на ось Ox. Обозначим через $M_1 M_2$ наибольшую (либо бесконечную) дугу такого вида. Положим $x^* = x_1 - x$ и обозначим через x_2^* значение x^* для точки M_2. Будем двигаться по дуге $M_1 M_2$ в левую сторону; тогда $dx < 0$, $dx^* = -dx > 0$, и из (6) получаем

$$d\,[\operatorname{arc\,tg} q - (x^* + x_1 + c)] \geqslant 0. \tag{10}$$

Согласно (9) $\operatorname{arc\,tg} q_1 - (x_1 + c) \geqslant 0$; отсюда и из (10) следует, что $\operatorname{arc\,tg} q - (x^* + x_1 + c) \geqslant 0$, или

$$q \geqslant \operatorname{tg}(x^* + x_1 + c) \tag{11}$$

для всех x^* на отрезке $0 \leqslant x^* \leqslant x_2^*$. Очевидно, $x_2^* + x_1 + c < +\pi/2$, так как в противном случае функция q должна обратиться в бесконечность в некоторой конечной точке.

4. Если точка M_2 является конечной, проведем через нее в правую сторону характеристику первого семейства и обозначим через $M_2 M_3$ максимальную (либо бесконечную) дугу этой характеристики, которая однозначно проектируется на ось Ox; через M_3 проведем в левую сторону характеристику второго семейства и т. д. Так мы получим линию, составленную из дуг характеристик последовательно первого и второго семейства. Вдоль этой линии, если двигаться в направлении возрастания номеров точек M_k, функция q (строго) монотонно возрастает. Эта линия естественным образом продолжается за точку M_1 так, что получается другая ее ветвь, по которой функция q (строго) монотонно убывает. Полную линию указанного вида условимся называть *цепочкой*. Обозначим через a_0 проекцию какого-нибудь звена цепочки на ось Ox, через $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и через $a_{-1}, a_{-2}, \ldots, a_{-n}, \ldots$ — проекции звеньев, которые идут, начиная от выбранного звена, соответственно в направлении возрастания и в направлении убывания функции q (если одна из точек M_k оказывается бесконечно удаленной, то соответствующая ветвь цепочки состоит из конечного числа звеньев; в этом случае, начиная с надлежащего номера, считаем $a_k = 0$). Все проекции берутся абсолютно, без учета знака, т. е. все $a_k \geqslant 0$. Из рассуждений, проведенных в пунктах 2 и 3, следует, что

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k \leqslant \pi. \tag{12}$$

5. Внимательное исследование цепочек, а также семейства линий $q = \text{const}$ обнаруживает, что если условие (12) соблюдается для всех цепочек, то хотя бы одна из них должна пересечь некоторую линию $q = \text{const}$ в двух различных точках (эти точки могут принадлежать разным компонентам линии $q = \text{const}$). Но вдоль каждой цепочки величина q строго и монотонно возрастает; таким образом, одинаковых значений q в разных точках одной цепочки быть не может. Полученное противоречие доказывает теорему.

Московский лесотехнический институт

Поступило 7 IX 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Гильберт, Основания геометрии, 1948, приложение V.