Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 1

МАТЕМАТИКА

В. Н. РЫБАКОВ

БИНОРМАЛЬНЫЕ СЕМЕЙСТВА КОНГРУЕНЦИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 4 IX 1953)

Будем называть линейчатую поверхность бинормальной, если образующие совпадают с бинормалями ее линии сжатия. Произвольную конгруенцию можно разложить с произволом одной функции одного аргумента на семейства бинормальных линейчатых поверхностей. Исключением является изотропная конгруенция, которая разлагается на бинормальные линейчатые поверхности единственным способом, и ее бинормальное семейство (линии сжатия семейства бинормальных линейчатых поверхностей) лежит на средней поверхности.

При определенном способе разложения конгруенции на бинормальные линейчатые поверхности касательные к бинормальному семейству образуют конгруенцию бинормальных касательных. Сумма анормалии данной конгруенции с анормалией конгруенции бинормальных касательных равна радиусу кручения кривых бинормального семейства.

Конгруенции, у которых одно из бинормальных семейств лежит на средней поверхности, существуют с произволом одной функции двух аргументов. Распределительные поверхности такой конгруенции секут среднюю поверхность по ортогональной системе. Касательные среднего бинормального семейства образуют конгруенцию, первая фокальная поверхность которой совпадает со средней поверхностью S конгруенции, а вторая со средней огибающей ее Σ.

Половина фокального расстояния конгруенции бинормалей равна среднему геометрическому между анормалией средней конгруенции касательных и радиусом кручения бинормального семейства. Касательные бинормального семейства огибают на фокальной поверхности Σ семейства линий, бинормали которых образуют вторую конгруенцию бинормалей. Для этой конгруенции поверхность Σ будет средней поверхностью в двух случаях: 1) если конгруенция бинормальных касательных является конгруенцией Гишара; 2) если конгруенция касательных является конгруенцией W. В первом случае конгруенция бинормалей образует конгруенцию K, во втором случае — конгруенцию A. Распределительные поверхности конгруенции K секут среднюю поверхность по линиям кривизны. Произведение радиусов фокальных линий средней конгруенции бинормальных касательных для конгруенции A равно квадрату граничного расстояния конгруенции касательных. Частным случаем конгруенции A является изотропная конгруенция.

Отсюда следует теорема:

На средней огибающей (минимальной поверхности) и на средней поверхности соответствуют асимптотические линии.

Бинормальные семейства могут располагаться симметрично относительно центра луча в двух случаях. В первом случае касательные к бинормальным кривым образуют равные углы с фокальными плоскостями луча (вполне симметричная пара — произвол одна функция двух аргументов). Во втором случае касательные к бинормальным семействам ортогональны (ортогональная пара — произвол одна функция двух аргументов).

Кручения бинормальных кривых вполне симметричной пары равны. Анормалии конгруенций бинормальных касательных вполне симметричной пары равны. Существуют вполне симметричные пары с равными фокальными расстояниями конгруенций бинормальных касательных (пары F — произвол четыре функции одного аргумента).

Средняя поверхность конгруенции, на которой лежит пара F, является бинормальной.

Для ортогональной пары сумма анормалии конгруенций бинормальных касательных равна с обратным знаком анормалии конгруенции бинормалей, а каждое из этих слагаемых равно радиусу кручения кривых противоположного бинормального семейства. Касательные плоскости средних огибающих конгруенции бинормальных касательных ортогональной пары пересекаются по нормали средней огибающей конгруенции бинормалей.

Существуют пары, являющиеся ортогональными и вполне симметричными (пара Γ — произвол четырех функций одного аргумента). Бинормальные кривые пары Γ проходят через граничные точки.

Пары конгруенций, все бинормальные семейства которых соответствуют, существуют с произволом пяти функций одного аргумента. Отношение граничных расстояний такой пары постоянно.

Поступило
1 VIII 1953