Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 1

МАТЕМАТИКА

М. И. ВИШИК

О ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 22 VIII 1953)

1. М. В. Келдыш [1] исследовал первую краевую задачу для эллиптических уравнений со старшими членами $u_{xx}+y^m u_{yy}$ в области, часть границы которой лежит на прямой $y=0$. Настоящая заметка, возникшая под влиянием этой работы, посвящена рассмотрению некоторых вопросов для общих эллиптических уравнений, вырождающихся на части границы области. Применение функциональных методов позволяет выяснить структуру разрешающего оператора, соответствующего первой краевой задаче, найти достаточные условия единственной разрешимости и регулярной разрешимости задачи, выяснить некоторые свойства резольвенты и т. п. Мы будем ради простоты вести изложение для уравнений второго порядка, хотя примененные методы легко обобщаются на уравнения высших порядков и на системы уравнений.

2. Пусть в ограниченной области $D'\subset R^n$, расположенной в полупространстве $x_n>0$ и имеющей часть границы Γ_0' на плоскости $x_n=0$, дано уравнение

$$Lu\equiv\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=h(x), \qquad (1)$$

$x=(x_1,\ldots,x_n)$, эллиптическое для точек x с $x_n>0$ и параболическое (с любым рангом квадратичной формы) для точек $x\in\Gamma_0'$, т. е. при $x_n=0$. Коэффициенты $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$ предполагаются дифференцируемыми и ограниченными, коэффициент $c(x)$ — ограниченным в D'.

Для простоты изложения предположим, что для любых чисел ξ_i выполнено неравенство

$$0\leqslant a_{nn}(x)\xi_n^2\leqslant C^2\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}(x)\xi_i\xi_k \quad (x\in D'), \qquad (2)$$

где C^2 — постоянная, не зависящая от x и ξ_i. (Отметим, что при $a_{nn}(x_0)>0$, $x_0\in\Gamma_0'$, это условие является излишним.)

Пусть H, соотв. R_G, — гильбертово пространство функций $u(x)$, соотв. градиентов $Gu=(u'_{x_1},\ldots,u'_{x_n})$. Скалярные произведения в этих пространствах зададим формулами

$$[u(x),\ v(x)]=\iint_D u(x)\cdot v(x)\,dx, \quad \{Gu,\ Gv\}=\iint_D\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_k}\,dx, \qquad (3)$$

где область $D \subset D'$ имеет часть границы Γ_0 на $x_n = 0$ и Γ_0 лежит строго внутри Γ'_0. Остальную часть границы области D обозначим через Γ_1; $\Gamma_1 \subset (x_n > 0)$.

Через $\Omega^\circ(D)$ обозначим многообразие непрерывных функций $u^\circ(x)$, имеющих кусочно-непрерывные производные, причем каждая из них обращается в нуль в некоторой граничной полоске области D. Оператор градиента G отображает $\Omega^\circ(D)$ на некоторое многообразие $\widetilde{R}_G \subset \mathring{R}_G$: $\widetilde{R}_G = G\Omega^\circ(D)$. Замыкание оператора G, рассматриваемого на $\Omega^\circ(D)$, будем обозначать также через G, его область определения — через $\mathring{\Omega}(D)$, а область изменения — через $\mathring{R}_G$.

Лемма 1. *Пусть* $c^2 x_n^\alpha \leqslant a_{nn}(x) \leqslant C^2 x_n^\alpha$ *для* $x \in D'$.

а) *Если* $0 \leqslant \alpha < 1$ *, *то все функции* $u(x)$ *из* $\mathring{\Omega}(D)$ *принимают в среднем значение нуль на любой внутренней части* Γ_0, *причем справедлива оценка*:

$$[u, u] \leqslant C\,\{Gu, Gu\}. \tag{4}$$

б) *Если* $\alpha \geqslant 1$ (*т. е. направление плоскости* $x_n = 0$ *является характеристическим в каждой точке* $x_0 \in \Gamma_0$), *то для любой гладкой функции* φ, *заданной на* Γ_0 *и обращающейся в нуль вблизи* $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1$, *найдется функция* $u(x) \in \mathring{\Omega}(D)$, *принимающая значение* φ *на* Γ_0. (*Более того, в* $\mathring{\Omega}(D)$ *существуют функции, стремящиеся к бесконечности при* $x_n \to 0$.) *При этом для* $\alpha < 2$ *имеет место оценка* (4).

Для $\alpha > 2$ легко привести пример, показывающий, что оператор G^{-1} может быть неограниченным.

Доказательство в случае а) следует из очевидного неравенства

$$\int |u(x_1, \ldots, x_n)|^2 dx_1 \ldots dx_{n-1} \leqslant$$
$$\leqslant (1-\alpha)^{-1} x_n^{1-\alpha} \int dx_1 \ldots dx_{n-1} \int\limits_0^{x_n} x_n^\alpha (u'_{x_n})^2 dx_n \leqslant C x_n^{1-\alpha} \{Gu, Gu\}, \tag{5}$$

заведомо справедливого для $u \in \Omega^\circ(D)$. Для почти всех x_n оно справедливо также для $u \in \mathring{\Omega}(D)$ (что легко установить с помощью предельного перехода). Отсюда следует, что u в среднем принимает значение нуль на любой внутренней части Γ_0. Из (5) непосредственно следует (4).

Для доказательства первого утверждения б) введем функцию

$$\psi_\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x_n < \delta, \\ (\ln|\ln\delta|)^\varepsilon - (\ln|\ln x_n|)^\varepsilon & \text{для } \delta \leqslant x_n \leqslant \exp\left[-\{\exp\left[(\ln|\ln\delta|)^\varepsilon - 1\right]^{1/\varepsilon}\}\right], \\ 1 & \text{для остальных } x_n; \end{cases}$$

$\varepsilon > 0$. Пусть $u(x)$ — любая непрерывная функция из $\mathscr{L}_2$, обращающаяся в нуль вблизи Γ_1 и имеющая в D непрерывные производные, причем по x_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ они ограничены, а $u'_{x_n} = O(x_n^{-\frac{\alpha+1}{2}+\varepsilon})$ (очевидно, для $\alpha > 1$ $u(x)$ может при $x_n \to 0$ стремиться к бесконечности). Функция $u_\delta = u\psi_\delta \in \Omega^\circ(D)$ и при $\delta \to 0$ $u_\delta \Rightarrow u$, $Gu_\delta \Rightarrow Gu$, откуда следует, что $u \in \mathring{\Omega}(D)$. При $\alpha = 1$ примером

---

* В случае $\alpha = 0$ коэффициент $a_{nn}(x_0) > 0$ для $x_0 \in \Gamma_0$, т. е. характеристические направления в точках $x_0 \in \Gamma_0$ не совпадают с направлением плоскости $x_n = 0$.

функции $u(x)$, принадлежащей $\dot{\Omega}(D)$ и стремящейся к бесконечности при $x_n \to 0$, может служить функция $u(x)$, которая вблизи Γ_0 ведет себя как $|\ln x_n|^{\varepsilon_1}$.

Второе утверждение случая б) доказывается просто.

В силу эллиптичности уравнения (1) функции $u(x) \in \dot{\Omega}(D)$ заведомо принимают в среднем значение нуль на любой замкнутой части $\Gamma_1' \subset \Gamma_1$, расположенной целиком в $x_n > 0$.

Во всем дальнейшем предполагается, что выполнено неравенство (4). Достаточные условия для этого указаны в лемме 1. Отметим, что (4) заведомо имеет место, если в некоторой окрестности Γ_0 справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) \xi_i\right)^2 \leqslant C^2 \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x) \xi_i \xi_k, \tag{6}$$

где $\beta_i(x)$ — некоторые гладкие функции, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2(x) = 1$. (Грубо говоря, это неравенство означает, что в точках $x \in \Gamma_0$ ранг квадратичной формы, стоящей справа, не меньше 1.)

3. Первая однородная краевая задача в случае а) ставится так: ищется решение уравнения (1), обращающееся в нуль на всей границе $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ области D. Обозначим через $\overline{\Omega}^{\circ}(D)$ совокупность тех функций $v(x)$ из $\dot{\Omega}(D)$, каждая из которых обращается в нуль в некоторой окрестности Γ_0.

Под решением (обобщенным) первой краевой задачи в случае а) мы будем понимать такую функцию $u(x) \in \dot{\Omega}(D)$, что для любой функции $v(x) \in \overline{\Omega}^{\circ}(D)$ выполнено соотношение:

$$[h, v] = -\{Gu, Gv\} - \sum_{i=1}^{n} [u, b_i v'_{x_i}] + \left[\left(c - \sum_{i=1}^{n} b'_{i_{x_i}}\right) u, v\right]. \tag{7}$$

Очевидно, что гладкие решения первой краевой задачи этому соотношению удовлетворяют.

Теорема 1. *Если выполнено условие* а) *и* $c(x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b'_{i_{x_i}} \leqslant 0$ *для $x \in D$, то первая краевая задача имеет, и притом единственное, решение.*

Для доказательства единственности полагаем в формуле (7) $h = 0$ и $v = u\psi_\delta$. Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем: $\{Gu, Gu\} \leqslant 0$, откуда следует $u \equiv 0$. Далее реализуем правую часть формулы (7) в виде билинейной формы некоторого оператора в пространстве $\mathring{R}_G$:

$$[h, v] = \{Gu, (-E + K) Gv\}. \tag{8}$$

Из доказанной единственности решения следует, что область изменения оператора $-E + K$ всюду плотна в $\mathring{R}_G$. Из неравенства $\{Gv, (-E + K) Gv\} \leqslant -\{Gv, Gv\}$ вытекает существование и ограниченность оператора $(-E + K)^{-1}$. Согласно (8) получаем, что $(G^*)^{-1} h = (-E + K)^* Gu$, где G^* — оператор, сопряженный с G, и, следовательно,

$$u = G^{-1}(-E + K)^{*-1} G^{*-1} h = L^{-1} h \tag{9}$$

является решением задачи, соответствующим правой части h. Очевидно, L^{-1} — ограниченный оператор.

4. В случае б), если $b_n(x) \geqslant -x_n^{\alpha-1} |\ln x_n|^{-\delta}$ $(\delta > 0)$ в некоторой окрестности Γ_0, первая краевая задача для уравнения (1) ставится так:

ищется решение уравнения (1), обращающееся в нуль на Γ_1; на Γ_0 никаких условий не задается. В этом случае под решением этой задачи мы будем понимать такую функцию $u(x)\in\Omega(D)$, что для любой функции $v(x)\in\overline{\Omega}^\circ(D)$ выполнено соотношение (7).

Теорема 2. *Если выполнено условие* б), $c(x)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b'_{i_{x_i}}(x)\leqslant 0$ $(x\in D)$ *и* $b_n(x)\geqslant -x_n^{\alpha-1}|\ln x_n|^{-\delta}$* *в некоторой окрестности* Γ_0, *то первая краевая задача имеет, и притом единственное, решение при любой правой части* $h(x)\in H$.

Доказательство приводится аналогично доказательству теоремы 1.

5. Если выполнено условие б) и $b_n(x)<0$ для $x\in\Gamma_0$, то первая краевая задача ставится точно так же, как в случае а). При $c(x)-$ $-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b'_{i_{x_i}}(x)\leqslant 0$ $(x\in D)$ существование и единственность решения устанавливаются следующим образом: оператор L, соответствующий задаче, является сопряженным с оператором L^*, соответствующим первой краевой задаче для уравнения $L^*v=g$, где L^*v — сопряженный с Lu дифференциальный оператор. Но у оператора L^* коэффициент при u'_{x_n} положителен на Γ_0, а следовательно, к нему применима теорема 2. Отсюда следует, что оператор L (как и оператор L^*) имеет ограниченный обратный, который задается по формуле, аналогичной (9). Далее легко показать, что функции, принадлежащие области определения оператора L, не могут принимать на Γ_0 отличных от нуля значений.

6. Лемма 2. *Если выполнено неравенство*

$$x_n^\beta\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\leqslant C^2\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\,\xi_i\,\xi_k, \tag{10}$$

где C^2 *не зависит от* x *и* ξ_i *и* $\beta<2$, *то оператор* G^{-1} *вполне непрерывен.*

Из этой леммы следует, что G^{*-1} — также вполне непрерывный оператор, если $\beta<2$.

Теорема 3. *Если при некотором* $\beta<2$ *имеет место неравенство* (10), *то относительно первых краевых задач для уравнений* (1) *и* $L^*v=g$ *всегда имеют место три теоремы, аналогичные трем теоремам Фредгольма.*

Оператор L, *соответствующий первой краевой задаче для уравнения* (1), *полуограничен* $([Lu,u]\leqslant M[u,u])$** *и имеет дискретный, конечнократный спектр. Резольвента* $(L-\lambda E)^{-1}$ *для регулярных значений* λ *имеет структуру, аналогичную* (9) (*операторы* G^{-1}, G^{*-1} *вполне непрерывны*).

7. Соответствующие утверждения для неоднородных граничных условий устанавливаются с помощью метода, аналогичного методу прямых и ортогональных разложений [2].

Поступило
14 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, ДАН, **77**, № 2, 181 (1951). [2] М. В. Вишик, Матем. сборн., **25** (67) : 2, 189 (1949).

* Очевидно, это условие допускает дальнейшие уточнения. При $\alpha=1$ множитель $x_n^{\alpha-1}$ следует заменить на $|\ln x_n|^{-1}$.

** Это утверждение всегда справедливо, если $c(x)-{}^1/_2\Sigma b'_{i_{x_i}}(x)\leqslant N<+\infty$ для $x\in D$ и имеет место оценка (4).