Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 1

*МАТЕМАТИКА*

Ю. М. БЕРЕЗАНСКИЙ

# О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ РАЗНОСТЯХ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 IX 1953)*

Как известно из теории якобиевых матриц (1), по разностной операции $l[u] = a_{j-1} u_{j-1} + c_j u_j + a_j u_{j+1} (a_j > 0, \operatorname{Im} c_j = 0)$, определенной на последовательностях $u_j$, заданных на целочисленных точках полуоси $j \geqslant 0$, может быть построена неубывающая функция $\tau(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ (спектральная функция) и система ортогональных относительно $d\tau(\lambda)$ полиномов $P_0(\lambda)$, $P_1(\lambda), \ldots$ так, что для любых последовательностей $f_j$, $g_j$, равных нулю вне некоторого интервала, справедливо равенство

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j \bar{g}_j = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \overline{G(\lambda)} d\tau(\lambda), \tag{1}$$

где $F(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j P_j(\lambda)$ — „преобразование Фурье" последовательности $f$.

При переходе к разностным операциям более высокого порядка, связанным с регулярными $J_p$-матрицами, как известно (2,3), сохраняется равенство, аналогичное (1), однако в нем фигурирует не спектральная функция, а конечномерная спектральная матрица.

В этой заметке мы покажем, что для разностной операции второго порядка в частных разностях

$$L[u] = a_{j-1\,k} u_{j-1\,k} + a_{jk} u_{j+1\,k} + b_{j\,k-1} u_{j\,k-1} + b_{j\,k} u_{j\,k+1} + c_{j\,k} u_{j\,k} \tag{2}$$
$$(a_{jk} > 0, \ \operatorname{Im} b_{jk} = \operatorname{Im} c_{jk} = 0)$$

справедлива аналогичная (1) формула с бесконечномерной спектральной матрицей. Эта матрица, как и в случае операции $l$, однозначно определяет операцию $L$. Мы ограничимся рассмотрением операции $L$ на последовательностях, заданных на целочисленных точках полуплоскости $j \geqslant 0$, так как в этом случае наиболее отчетливо видна аналогия между рассмотрениями этой заметки и теорией якобиевых матриц и степенной проблемы моментов.

1°. Нам понадобится некоторое обобщение метода направляющих функционалов М. Г. Крейна (4). Обозначим через $T(\lambda) = \| \tau_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{-\infty}^{\infty}$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ эрмитову бесконечномерную матрицу-функцию, обладающую тем свойством, что для любого вектора $(\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots)$, только конечное число компонент которого отлично от нуля, форма $\sum_{\alpha, \beta = -\infty}^{\infty} \tau_{\alpha\beta}(\lambda) \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta$ является неубывающей функцией от $\lambda$. Функцию $T(\lambda)$, нормированную условиями $T(\lambda - 0) = T(\lambda)$, $T(0) = 0$, будем называть матричной функцией распределения. Обозначим через $L_T^2$ совокупность векторных функций $\xi(\lambda) = (\ldots, \xi_{-1}(\lambda), \xi_0(\lambda), \xi_1(\lambda), \ldots)$ с конечным числом отличных от нуля компонент, причем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\xi_\alpha(\lambda)|^2 d\tau_{\alpha\alpha}(\lambda) = \infty$. После введения скалярного произведения

$$(\xi, \eta) = \sum_{\alpha, \beta = -\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi_\alpha(\lambda) \overline{\eta_\beta(\lambda)}\, d\tau_{\alpha\beta}(\lambda)$$

$L_T^2$ превращается в гильбертово, вообще говоря, неполное пространство.

Пусть $\mathfrak{H}$ некоторое гильбертово, вообще говоря, неполное пространство, $H$ — его пополнение, а $A$ — эрмитов оператор, определенный во всем $\mathfrak{H}$ (т. е. $(Af, g) = (f, Ag)$; $f, g \in \mathfrak{H}$).

Счетную систему функционалов $\Phi_\alpha(f; \lambda)$ $(\alpha = \ldots, -1, 0, 1;\ f \in \mathfrak{H})$, каждый из которых при фиксированном $f$ является аналитической функцией от параметра $\lambda$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, будем называть направляющей для оператора $A$, если:

а) существует последовательность $\mathfrak{H}_0 \subseteq \mathfrak{H}_1 \ldots \to \mathfrak{H}$ (вообще говоря, незамкнутых) подпространств $\mathfrak{H}$ и последовательность натуральных чисел $p_0 \leqslant p_1 \leqslant \ldots$ такие, что функционалы $\Phi_\alpha(f; \lambda)$ $(|\alpha| \leqslant p_n)$ хотя бы при одном значении $\lambda$ линейно независимы в $\mathfrak{H}_n$, а при $|\alpha| > p_n$ $\Phi_\alpha(f; \lambda) = 0$ $(f \in \mathfrak{H}_n; -\infty < \lambda < \infty)$, причем $A\mathfrak{H}_n \subseteq \mathfrak{H}_{n+1}$;

б) уравнение $Ax - \lambda x = f$ $(f \in \mathfrak{H}_{n+1})$ имеет тогда и только тогда решение $x \in \mathfrak{H}_n$, когда $\Phi_\alpha(f; \lambda) = 0$ при $|\alpha| \leqslant P_{n+1}$.

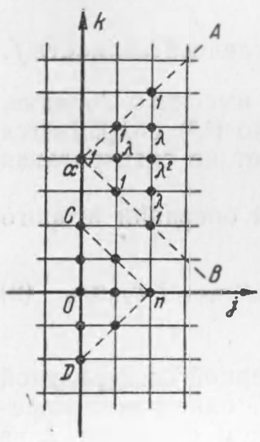

Рис. 1

При помощи некоторых видоизменений рассуждений М. Г. Крейна [4] можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Существует по крайней мере одна матричная функция распределения $T(\lambda)$ такая, что для любых $f, g \in \mathfrak{H}$ выполняется равенство*

$$(f, g) = \sum_{\alpha, \beta = -\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_\alpha(f; \lambda) \overline{(\Phi_\beta(g; \lambda)}\, d\tau_{\alpha\beta}(\lambda).$$

*Функция $T(\lambda)$ единственна в том и только в том случае, когда хотя бы одно из двух дефектных чисел оператора $A$ в $H$ равняется нулю.*

2°. Обозначим $P_{jk}(\alpha; \lambda) = P_q(\alpha; \lambda)$ $(j = 0, 1, \ldots;$ $k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots;$ $\alpha = \ldots, -1, 0, 1, \ldots;$ $\lambda$ комплексное число) решение уравнения $L[u] = \lambda u$ при начальных условиях $u_{-1k} = 0$, $u_{0k} = \delta_{\alpha k}(k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$. Очевидно, $P_q(\alpha; \lambda) = 0$ вне угла $A\alpha B$ (см. рис. 1), а в этом угле $P_q(\alpha; \lambda)$ будет полиномом от $\lambda$; распределение этих полиномов указано на рис. 1.

Через $\mathfrak{H}$ обозначим неполное гильбертово пространство последовательностей $f_{jk} = f_q$ $(j = 0, 1, \ldots;$ $k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, каждая из которых равна нулю вне некоторой конечной области, со скалярным произведением $(f, g) = \sum\limits_q f_q \bar{g}_q$. Отнесем каждую $f \in \mathfrak{H}$ его обобщенное преобразование Фурье — бесконечномерный вектор $(\ldots, F_{-1}(\lambda), F_0(\lambda), F_1(\lambda), \ldots)$, где $F_\alpha(\lambda) = \sum\limits_q f_q P_q(\alpha; \lambda)$; очевидно, только конечное число $F_\alpha(\lambda)$ отлично от нуля.

Теорема 2. *Существует по крайней мере одна матричная функция распределения* $T(\lambda) = \| \tau_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{-\infty}^{\infty}$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ *(спектральная матрица) такая, что для каждых* $f, g \in \mathfrak{H}$

$$\sum_q f_q \bar{g}_q = \sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(\lambda) \overline{G_\beta(\lambda)}\, d\tau_{\alpha\beta}(\lambda). \tag{3}$$

*Для того чтобы спектральная матрица была единственна, необходимо и достаточно, чтобы для невещественных* $\lambda$ *не существовали решения* $u_q$ *уравнения* $L[u] = \lambda u$ *с граничным условием* $u_{-1k} = 0$ $(k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, *для которых* $\sum_q |u_q|^2 < \infty$.

Для доказательства определим в $\mathfrak{H}$ оператор $A$, полагая $Af = L[f]$; при этом мы считаем, что $f_{-1k} = 0$. С помощью формулы Грина для уравнений в частных разностях [5] нетрудно проверить, что $A$ эрмитов. Используя эту же формулу, можно показать, что система функционалов $\Phi_\alpha(f; \lambda) = \sum_q f_q P_q(\alpha; \lambda) = F_\alpha(\lambda)$ $(f \in \mathfrak{H};\ \alpha = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ является направляющей для оператора $A$, при этом в качестве пространства $\mathfrak{H}_n$ следует принять совокупность всех последовательностей $f_q$, равных нулю вне треугольника $CnD$ (см. рис. 1), и положить $p_n = n$. Применяя теорему 1, убеждаемся в справедливости доказываемого утверждения.

3°. Полагая в (3) $g = \delta_{qp}$, получим

$$f_p = \sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(\lambda) P_p(\beta, \lambda)\, d\tau_{\alpha\beta}(\lambda) = \sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\sum_q f_q P_q(\alpha; \lambda)\Big] P_q(\beta; \lambda)\, d\tau_{\alpha\beta}(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda \Big[\sum_q \vartheta_{pq}(\lambda) f_q\Big], \quad \vartheta_{pq}(\lambda) = \sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\lambda} P_q(\alpha; \mu) P_p(\beta; \mu)\, d\tau_{\alpha\beta}(\mu).$$

Функция $\vartheta_{pq}(\lambda)$ играет роль, аналогичную функции $\vartheta(p, q; \lambda)$, введенной Карлеманом [6] (см. также [7]) при разложении по собственным функциям уравнения Шредингера. Очевидно, $\tau_{\alpha\beta}(\lambda) = \vartheta_{(0,\alpha)(0,\beta)}(\lambda)$. Отметим также следующее соотношение ортогональности для полиномов $P_q(\alpha; \lambda)$, которое вытекает из (3):

$$\sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_q(\alpha; \lambda) P_p(\beta; \lambda)\, d\tau_{\alpha\beta}(\lambda) = \delta_{qp}.$$

4°. Справедлива следующая теорема единственности:

Теорема 3. *Если двум разностным уравнениям отвечает одна и та же спектральная матрица, то эти уравнения совпадают.*

5°. Рассмотрим задачу восстановления разностного уравнения по спектральной матрице. Пусть $T(\lambda) = \| \tau_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{-\infty}^{\infty}$ — некоторая матричная функция распределения, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n\, d\tau_{\alpha\alpha}(\lambda) < \infty \quad (\alpha = \ldots, -1, 0, 1, \ldots;\ n = 0, 1, \ldots); \tag{4}$$

отсюда вытекает, что векторы $\xi_\alpha(\lambda)$, компонентами которых служат полиномы от $\lambda$, входят в $L_T^2$. Будем предполагать, что для каждых $j, k$ $(j \geqslant 0)$ система $(j+1)^2$ векторов

$$\delta_{\alpha\, k+j}, \ldots, \delta_{\alpha\, k-j};\ \lambda\delta_{\alpha\, k+j-1}, \ldots, \lambda\delta_{\alpha\, k-j+1};\ \lambda^2\delta_{\alpha\, k+j-2}, \ldots, \lambda^2\delta_{\alpha\, k-j+2};\ \ldots;\ \lambda^j\delta_{\alpha k} \tag{5}$$

линейно независима в $L_T^2$. Обозначим через $D_{jk} = D_q$ вектор единичной длины, являющийся линейной комбинацией с вещественными коэффициентами векторов (5), ортогональный ко всем этим векторам за исключением $\lambda^j\delta_{\alpha k}$, причем последний вектор входит в разложение $D_{jk}$ с положительным коэффициентом; этими условиями вектор $D_{jk}$ определяется однозначно.

Теорема 4. *Для того чтобы матричная функция распределения* $T(\lambda) = \| \tau_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{-\infty}^{\infty}$ *была спектральной матрицей некоторого разностного уравнения, необходимо и достаточно, чтобы*: 1) *выполнялись неравенства* (4), *причем* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau_{\alpha\alpha}(\lambda) = 1 \quad (\alpha = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$;

2) *каждая система векторов* (5) *была линейно независима в* $L_T^2$; 3) *векторы* $D_{jk}$ $(j \geqslant 0)$ *удовлетворяли соотношению ортогональности* $(D_q, D_p) = \delta_{qp}$. *При выполнении этих условий коэффициенты разностного уравнения строятся по формулам*: $a_{jk} = (\lambda D_{jk},\ D_{j+1\,k})$, $b_{jk} = (\lambda D_{jk},\ D_{j\,k+1})$, $c_{jk} = (\lambda D_{jk},\ D_{jk})$ $(j \geqslant 0)$.

Отметим, что при выполнении условий теоремы $D_{jk} = P_{jk}(\alpha; \lambda)$.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
27 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Ахиезер, Усп. матем. наук, 9 (1941). [2] М. Г. Крейн, ДАН, 69, № 2 (1949). [3] Я. М. Каждан, ДАН, 82, № 3 (1952). [4] М. Г. Крейн, Збірн. праць Ін-ту матем. АН УРСР, № 10 (1948). [5] R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy, Math. Ann., 100 (1928) (русск. пер. Усп. матем. наук, 8 (1940). [6] T. Carleman, Ark. f. Matem., Astr. och Fys., 24 B, № 11 (1934). [7] А. Я. Повзнер, ДАН, 79, № 2 (1951).