

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОДХОДЕ

И. Л. Соловцов, Ю. Д. Черниченко  
Политехнический институт, Гомель

В этой работе на основе квазипотенциального подхода к квантовой теории поля решена обратная задача. В рамках релятивистского квазиклассического приближения получены формулы, восстанавливающие квазипотенциал взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц равных масс по заданному для некоторого интервала энергий при фиксированном значении орбитального момента  $l$  набору сдвигов фаз и спектру их масс. Рассмотрено восстановление квазипотенциала по релятивистской амплитуде рассеяния в высокоэнергетическом приближении.

1. Квазипотенциальный подход к квантовой теории поля, впервые предложенный А. А. Логуновым и А. Н. Тавхелидзе в работе [1], является одним из эффективных методов изучения свойств релятивистских связанных систем [2-4]. Причем, потенциал кваркового взаимодействия на малых расстояниях, полностью определяемый КХД, выбирается кулоновским. Однако на больших расстояниях выбор взаимодействия, существенно влияющий на спектральные свойства связанных систем, имеет определен произвол.

Наиболее последовательным способом восстановления потенциала является решение обратной задачи (ОЗ) [5-8]. При этом восстановление взаимодействия в этих и ряде других работ формулируется на основе нерелятивистского уравнения Шредингера. Релятивистская ОЗ рассеяния, основанная на дифференциальном квазипотенциальном уравнении [9], рассмотрена в работе [10]. Приближенному решению ОЗ рассеяния, использующему высокоэнергетическое представление для релятивистской квазипотенциальной амплитуды, была посвящена работа [11]. Решение многоканальной ОЗ рассеяния на основе многоканальной матрицы было получено в работе [12].

В разделе 2 данной работы в рамках релятивистского квазипотенциального квазиклассического подхода (РККП) [2, 13] рассматривается задача восстановления квазипотенциала взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц равных масс  $m$  по заданным для некоторого интервала энергий значениям спектральной функции и сдвигу фаз. В основу этого подхода положено конечно-разностное квазипотенциальное уравнение для радиальной волновой функции  $\varphi_1(r)$ , записанное (всюду  $\hbar=c=1$ ) в релятивистском конфигурационном представлении [14, 15],

$$\left[ \text{ch} \left( \frac{i\lambda d}{dr} \right) + \frac{\lambda^2 l(l+1)}{2r} \right] \exp \left( \frac{i\lambda d}{dr} \right) - X(r) \varphi_1(r) = 0,$$

(1)

$$X(r) = [M - V(r)] / 2m, \quad r^{(2)} = r(r + i\lambda), \quad \lambda = 1/m,$$

где  $V(r)$  - сферически-симметричный квазипотенциал;  $M$  - масса связанного состояния взаимодействующих частиц;  $r$  - модуль релятивистской относительной координаты, являющейся релятивистским инвариантом.

Следующий раздел посвящен восстановлению квазипотенциала по релятивистской амплитуде рассеяния в высокоэнергетическом представлении. Последний раздел работы рассматривает применения полученных результатов, а в заключении подводится итог проведенному рассмотрению.

## 2. Релятивистский квазипотенциальный квазиклассический подход

Решение уравнения (1) в ВКБ-приближении [2, 13] позволяет найти выражения для спектральной функции и фазового сдвига:

$$S(\mu, \Lambda) = \pi \lambda [n(M, \Lambda) + i/2] = \int_{r^-}^{r^+} dr \chi_9(r), \quad (2)$$

$$f(\mu, \Lambda) = \lambda \delta_1(M) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{r^-}^R dr \chi_9(r) - \int_{r_8^-}^R dr \chi_8(r) \right], \quad (3)$$

где

$$\chi_9(r) = i + i[\mu - V_M(r)]/C(r), \quad C^2(r) = 1 + \Lambda^2/r^2, \quad \Lambda = \lambda(1 + i/2),$$

$$\chi_9(r) = \operatorname{arch} \chi_9(r), \quad \chi_8(r) = \chi_9(r) \Big|_{V_M(r) = V_8(r)}$$

Отметим, что спектральная функция (2) и фазовый сдвиг (3) является непосредственным геометрическим обобщением соответствующих нерелятивистских выражений [5, 6] путем замены в них евклидова расстояния  $r(r) = \sqrt{m[E - V(r)]}$  на расстояние в пространстве Лобачевского, которое измеряется быстротой  $\chi_9(r)$  в поле  $V(r)$ .

Точки поворота  $r^\pm = r^\pm(\mu, \Lambda)$  модифицированного квазипотенциала  $V_M(r)$  удовлетворяют условию

$$V_M(r^\pm) = \mu, \quad V_M(r) = C(r) + \mu_0 - 1 + V(r)/2m. \quad (4)$$

$r_8^\pm = r_8^\pm(\mu, \Lambda)$  являются точками поворота базового потенциала  $V_8(r_8^\pm) = \mu$ . Величина  $M_0$ , входящая в определение безразмерных параметров  $\mu = (M - M_0)/2m$ ,  $\mu_0 = (2m - M_0)/2m$ , является абсолютным минимумом квазипотенциала  $S(0, \Lambda) = 0$ . Основой рассматриваемого метода [16, 17] является инклевзия

$$I(\mu, \Lambda) = \int_{r^-}^{r^+} dr [\mu - V_M(r)] \quad \text{и оператор } D_\mu \text{ такой, что}$$

$$D_\mu [h] = \int_0^\mu d\mu' g(\mu - \mu') h(\mu', \Lambda) = I(\mu, \Lambda). \quad (5)$$

Из этого требования следует, что функция  $g(t)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_0^t dt g(t-\tau) \operatorname{arch}(\tau+1) = t. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) находится с помощью преобразования Лапласа

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i}^{x+i} dp \frac{\exp(p(t-1))}{pK_0(p)}, \quad x > 0,$$

где  $K_0(p)$  - функция Бесселя мнимого аргумента. Продифференцировав равенство (5) по  $\mu$  и  $\Lambda$  с учетом условия (4), получаем систему уравнений, определяющую обе точки поворота модифицированного квазипотенциала в рамках РККП [17]:

$$r^+ r^- = \frac{\partial}{\partial \mu} D_\mu [S], \quad (7)$$

$$a(r^+, r^-) = \operatorname{arsh}(\Lambda/r^+) - \operatorname{arsh}(\Lambda/r^-) = \frac{\partial}{\partial \Lambda} D_\mu [S].$$

Если для спектральной функции (2) существует изображение  $S(p, \Lambda)$  при  $\operatorname{Re} p > a$ , то правые части соотношений (7) выражаются через интегралы Меллина:

$$r = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i}^{x+i} dp e^{\mu p} p G(p) S(p, \Lambda), \quad (8)$$

$$a(r^+, r^-) = \frac{\partial}{\partial \Lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i}^{x+i} dp e^{\mu p} G(p) S(p, \Lambda), \quad x > a,$$

где  $G(p) = e^{-p} / pK_0(p)$ .

Так как соотношения (7), (8) верны, когда  $S(\mu, \Lambda)$ , а следовательно, и квазипотенциал, являются кусочно-непрерывными функциями, то и в случае  $M_0 = -\infty$  (сингулярный квазипотенциал) эти результаты остаются справедливыми, если ввести регулярный кусочно-непрерывный квазипотенциал

$$V_0(r) = \begin{cases} V(r) - V_0, & 0 < r < r^-(M_0, \Lambda), \quad r \geq r^+(M_0, \Lambda) \\ 0, & r^-(M_0, \Lambda) < r < r^+(M_0, \Lambda), \end{cases}$$

где  $V(r^\pm(M_0, \Lambda)) = V_0$ ,  $M_0 = V_0 + 2m$ .

Переход к истинным выражениям осуществляется путем предельного перехода при  $M_0 = -\infty$ . Отметим, что в случае  $l=0$  спектральная функция опре-

делает только расстояние  $r$  между ветвями квазипотенциала [16, 17].

Рассмотренный подход применим и для восстановления квазипотенциала по фазово-спектральным данным  $h(\mu, \Lambda)$ . Так, фазово-спектральным данным (кулоновского взаимодействия нет)

$$h_0(\mu, \Lambda) = \theta(\mu - \mu_0) I(\mu, \Lambda) + [\theta(\mu) - \theta(\mu - \mu_0)] S(\mu, \Lambda), \quad (9)$$

где  $\theta(\mu)$  - ступенчатая функция, соответствует инклевзия

$$I_0(\mu, \Lambda) = \theta(\mu - \mu_0) \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{r^-}^R dr [\mu - V_M(r)] - \int_{r_\delta^-}^R dr [\mu - V_\delta(r)] \right\} +$$

$$+ [\theta(\mu) - \theta(\mu - \mu_0)] \int_{r^-}^{r^+} dr [\mu - V_M(r)],$$

с базовым потенциалом  $V_\delta(r) = C(r) + \mu_0 - 1$ .

Причем, функции  $h_0(\mu, \Lambda)$  и  $I_0(\mu, \Lambda)$  также связаны соотношением (5), дифференцирование которого по  $\mu$  и  $\Lambda$  дает решение релятивистской ОЗ (кулоновского взаимодействия нет):

$$r_0 = \theta(\mu - \mu_0) (r_\delta^- - r^-) + [\theta(\mu) - \theta(\mu - \mu_0)] (r^+ - r^-) = \frac{\partial}{\partial \mu} D [h_0], \quad (10)$$

$$a(r^+, r^-) = \frac{\partial}{\partial \Lambda} D [h_0], \quad 0 < \mu < \mu_0.$$

Если квазипотенциал  $V(r) = U(r) - \alpha/r$  (11)

содержит кулоновское притяжение ( $\alpha > 0$ ), то фазово-спектральные данные  $h_1(\mu, \Lambda)$  имеют прежний вид (9), но инклевзия  $I_1(\mu, \Lambda)$  содержит дополнительный член

$$I_1(\mu, \Lambda) = I_0(\mu, \Lambda) + \theta(\mu - \mu_0) \int_{\mu_\delta}^{\mu_0} d\mu' g(\mu - \mu') S_\delta(\mu', \Lambda),$$

где

$$S_\delta(\mu, \Lambda) = \int_{r_\delta^-}^{r_\delta^+} dr \chi_\delta(r), \quad S_\delta(\mu_\delta, \Lambda) = 0, \quad \mu_\delta < \mu < \mu_0$$

есть спектральная функция базового потенциала ( $\alpha > 0$ )

$$V_\delta(r) = C(r) + \mu_0 - 1 - \alpha/2\pi r. \quad (12)$$

Следовательно, решение релятивистской ОЗ имеет вид

$$r_0 + \theta(\mu - \mu_0) \frac{\partial}{\partial \mu} \int_{\mu_8}^{\mu_0} d\mu' g(\mu - \mu') S_\delta(\mu', \Lambda) = \frac{\partial}{\partial \mu} D_\mu [h_1], \quad (13)$$

$$a(r^+, r^-) + \theta(\mu - \mu_0) \frac{\partial}{\partial \Lambda} \int_{\mu_8}^{\mu_0} d\mu' g(\mu - \mu') S_\delta(\mu', \Lambda) = \frac{\partial}{\partial \Lambda} D_\mu [h_1], \quad 0 < \mu < \mu_0.$$

Если квазипотенциал (11) содержит кулоновское отталкивание ( $\alpha < 0$ ), то фазово-спектральным данным

$$h(\mu, \Lambda) = \theta(\mu - \mu_1) f_1(\mu, \Lambda) + [\theta(\mu - \mu_0) - \theta(\mu - \mu_1)] f_0(\mu, \Lambda) +$$

$$+ [\theta(\mu) - \theta(\mu - \mu_1)] S(\mu, \Lambda), \quad \mu_1 > \mu_0$$

отвечает инклюзия

$$I(\mu, \Lambda) = \theta(\mu - \mu_1) \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{r_1^-}^R dr [\mu - V_M(r)] - \int_{r_8^-}^R dr [\mu - V_\delta(r)] \right] +$$

$$+ [\theta(\mu - \mu_0) - \theta(\mu - \mu_1)] \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{r_0^-}^R dr [\mu - V_M(r)] - \right.$$

$$\left. - \int_{r_8^-}^R dr [\mu - V_\delta(r)] \right] + [\theta(\mu) - \theta(\mu - \mu_1)] \int_{r_1^-}^{r_1^+} dr [\mu - V_M(r)]$$

с базовым потенциалом (12) при  $\alpha < 0$ . Теперь решение релятивистской ОЗ дается формулами:

$$\theta(\mu - \mu_1) (r_8^- - r_1^-) + [\theta(\mu - \mu_0) - \theta(\mu - \mu_1)] (r_8^- - r_0^-) +$$

$$+ [\theta(\mu) - \theta(\mu - \mu_1)] \int_{r_1^-}^{r_1^+} d\mu' g(\mu - \mu') S_\delta(\mu', \Lambda), \quad (14)$$

$$\theta(\mu - \mu_1) a(r_8^-, r_1^-) + [\theta(\mu - \mu_0) - \theta(\mu - \mu_1)] a(r_8^-, r_0^-) +$$

$$+ [\theta(\mu) - \theta(\mu - \mu_1)] a(r_1^+, r_1^-) = \frac{\partial}{\partial \Lambda} D_\mu [h], \quad 0 < \mu < \mu_1.$$

В заключение отметим, что если для функции  $h(\mu, \Lambda)$  существует изображение Лапласа, то правые части соотношений (10), (13) и (14) также выражаются через интегралы Меллина.

### 3. Высокоэнергетическое приближение

Релятивистская амплитуда рассеяния в случае локального сферически-симметричного квазипотенциала в высокоэнергетическом приближении в мандельштамовских переменных определяется выражением [11]:

$$F(s, t) = -\frac{1}{\text{sh}\chi_{pq}} \int_{\rho_0}^{\infty} dr r V(r) \sin(mr\chi_{pq}) \exp\left[-\frac{i}{\text{sh}\chi_{pq}} \int_r^{\infty} dr' V(r')\right],$$

где

$$\text{ch}\chi_{pq} = 1 - t/2m^2, \quad \text{sh}\chi_{pq} = \sqrt{s - 4m^2}/2m.$$

Если квазипотенциал  $V(r)$  не зависит от энергии, а функция

$$\rho = \int_r^{\infty} dr' V(r'), \quad \rho(0) = \rho_0 \ll 1, \quad \rho(\infty) = 0$$

имеет обратную  $\gamma(\rho)$ , то

$$F(s, t) = -\int_0^{\infty} d\rho \gamma(\rho) \frac{\sin(mr(\rho)\chi_{pq})}{\text{sh}\chi_{pq}} [\theta(\rho) - \theta(\rho - \rho_0)] \exp(-i\rho/\text{sh}\chi_{pq})$$

и представляет собой интеграл Фурье, а поэтому

$$\gamma(\rho) \frac{\sin(mr(\rho)\chi_{pq})}{\text{sh}\chi_{pq}} [\theta(\rho) - \theta(\rho - \rho_0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d(\text{sh}^{-1}\chi_{pq}) F(s, t) \exp(i\rho/\text{sh}\chi_{pq}). \quad (15)$$

Таким образом, если функция  $\gamma(\rho)$  определяемая из (15), существует (для этого достаточно, чтобы квазипотенциал был несингулярным и отличным от нуля при  $r > 0$ ), то тогда

$$V(r) = -\frac{d\rho}{dr}. \quad (16)$$

### 4. Некоторые применения

Рассмотрим восстановление взаимодействия по изображениям

$$S(p, 0) = (2m/\alpha)^{1/a} \Gamma(1+1/a) e^{P_0} K_0(p) p^{-1-1/a}, \quad \text{Re} p > 0,$$

где  $\Gamma(t)$  - гамма-функция, отвечающему в РКП степенному квазипотенциалу [2]

$$V(r) = \alpha r^a, \quad a, \alpha > 0. \quad (17)$$

Тогда из (8) получаем

$$\gamma = (2m/\alpha)^{1/a} \Gamma(1+1/a) \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i}^{x+i} dp e^{mp} p^{-1-1/a}, \quad x > 0.$$

Отсюда непосредственно находим

$$r = (2\pi\mu/\alpha)^{1/\alpha}. \quad (18)$$

Теперь, обращая (18), восстанавливаем квазипотенциал (17). Еще один интересный случай представляет спектр [18]

$$S(\mu, 0) = \alpha \operatorname{arsh}(\mu + 1), \quad \alpha > 0, \quad (19)$$

получаемый из точного решения уравнения (1) для сферического "потенциального ящика"

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r < \alpha \\ \infty, & r > \alpha. \end{cases} \quad (20)$$

Спектр (19) имеет изображение

$$S(p, 0) = \alpha e^p K_0(p)/p, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Тогда из (8) следует  $r = \alpha$ , обращение которого восстанавливает квазипотенциал (20).

Полученные в разделе 3 формулы (15) и (16) позволяют, в частности, получать асимптотики квазипотенциала по асимптотикам амплитуды рассеяния или ее производных. Так, проведенные оценки показывают, что граница Фруассара для полного сечения

$$\sigma_t(s) \leq \pi m^{-2} \ln^2(s/4m^2),$$

справедливая при высоких энергиях и малых передачах импульса ( $t=0$ ), не определяет форму квазипотенциала на малых расстояниях, где требуются большие передачи импульса, но дает его "асимптотику":

$$V(r) \approx (m^2 r^2 - \pi/24)^{-1/2}, \quad r \rightarrow m^{-1} \sqrt{\pi/24}.$$

Ближкие результаты дает и асимптотика [19]

$$d \operatorname{Im} F(s, 0) / dt \leq 2^{-7} m^{-3} \operatorname{sh} \chi_q \ln^2(\operatorname{sh}^2 \chi_q).$$

В этом случае

$$V(r) \approx (m^2 r^2 (m^2 r^2 + 1) - \pi/16)^{-1/2}.$$

## 5. Заключение

Итак, в данной работе в рамках релятивистского квазипотенциального подхода рассмотрены два метода решения ОЗ: восстановление квазипотенциала по фазово-спектральным данным и амплитуде рассеяния. Полученные результаты носят релятивистски инвариантный характер.

Рассмотренные в работе примеры подтверждают эффективность применения ВКБ-метода, в частности, к спектру сферического "потенциального ящика". Это связано с тем, что вблизи минимума энергетические уровни, рассчитанные в первом порядке ВКБ-приближения, являются точными. Вблизи порога диссоциации движение становится почти классическим и результаты первого порядка ВКБ-приближения также будут точными.

Использование асимптотических оценок при высоких энергиях, но малых передачах импульса ( $t=0$ ), не определяет форму квазипотенциала на

малых расстояниях. Для этого требуются данные по рассеянию при больших передачах импульса.

В заключение авторы выражают благодарность Ю.С.Вернову и Н.Б.Скачкову за интерес к работе и полезное обсуждение полученных результатов.

#### Л и т е р а т у р а

1. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. //Nuovo Cim. 1963. Vol.29. P.380.
2. Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. //Письма в ЖЭТФ. 1978. Т.28. С.326; ЭЧАЯ. 1978. Т.9. С.5; ЯФ.1980. Т.31. С.1332.
3. Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. //ТМФ. 1979. Т.41. С.205.
4. Сидоров А.В., Скачков Н.Б. //ТМФ. 1981. Т.46. С.213.
5. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир. 1969. 607с.
6. Шадан К., Сабатье Н. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М.: Мир. 1980. 408с.
7. Захарьев Б.Н., Сузько А.А. Потенциалы и квантовое рассеяние. М.: Энергоатомиздат. 1985. 224с.
8. Thaker H.V., Quigg C., Rosner J.L. //Phys. Rev. 1978. Vol. D18. P.274.
9. Ризов В.А., Тодоров И.Т. //ЭЧАЯ. 1975. Т.6. С.669.
10. Маляров и др. //ЯФ. 1979. Т.30. С.1126.
11. Амирханов И.В., Гречко В.Е., Дементьев Р.К. //ЭЧАЯ. 1981. Т.12. С.651.
12. Соколов С.Н. Препр. ОТФ 79-139. ИФВЭ, Серпухов. 1979.
13. Донков А.Д. и др. Взаимодействие частиц на малых расстояниях и фундаментальная длина: Тр. IV Междунар. симпоз. по нелокальным теориям поля. Алушта, 1976. Препр. ОИЯИ Д2-9788. Дубна, 1978. С.36.
14. Kadyshevsky V.G. //Nucl. Phys. 1968. Vol. B6. P.125.
15. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. //Nuovo Cim. 1968. Vol. 55A. P.233; ЭЧАЯ. 1972. Т.2. С.635.
16. Соловцов И.Л. //Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат.наук. 1982. Т.1. С.109; Соловцов И.Л., Черниченко Ю.Д. //Изв. вузов СССР. Физика. 1984. Т.4. С.63.
17. Соловцов И.Л., Черниченко Ю.Д. //ЯФ. 1985. Т.42. С.494; Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1985. Т.6. С.107.
18. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. //ЯФ. 1969. Т.9. С.462.
19. Вернов Ю.С., Черниченко Ю.Д. //ТМФ. 1983. Т.56. С.476.

УДК 539.12

#### ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СТРУКТУРА НЕКОТОРЫХ СОСТАВНЫХ АДРОННЫХ СИСТЕМ

В.Е.Троицкий, НИИЯФ МГУ, Москва

Дано обсуждение релятивистских методов описания составных адронных систем. Изложен дисперсионный подход к указанной проблеме, приведены результаты применения его к некоторым частицам и ядрам. Показана важ-