Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 3

ГЕОФИЗИКА

Е. Н. БЛИНОВА

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ НА УРОВНЕ МОРЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 15 VII 1953)

В работе [1] нами был дан способ определения осредненного за большой промежуток времени планетарного поля давления («центры действия» атмосферы) по заданному полю температуры. В качестве одного из отправных уравнений было использовано уравнение Фридмана, определяющее изменение вектора вихря в данной частице. Мы проектировали уравнение Фридмана на вертикальную ось и пренебрегали членами с вертикальной скоростью. Упрощенное таким путем уравнение мы применили для определения давления на среднем уровне атмосферы. Строго говоря, указанное пренебрежение можно делать лишь для уравнения, осредненного по всей толще атмосферы. В настоящей работе мы хотим дать решение нашей задачи без пренебрежения членами с вертикальной скоростью.

Мы считаем Землю шаром радиуса a_0 и учитываем действие на атмосферу силы тяжести и отклоняющей силы вращения Земли.

Введем в рассмотрение сферические координаты: r — расстояние до центра Земли, θ — дополнение до широты (увеличивающееся к югу) и λ — долготу места (увеличивающуюся к востоку). Как и в [1], мы считаем, что движение атмосферы составляется из зональной циркуляции и возмущений последней, т. е. рассматриваем движение, в котором составляющие V_θ и V_λ скорости по осям θ и λ и давление P представляются следующим образом:

$$V_\theta = v_\theta(\theta, \lambda, z), \quad V_\lambda = \overline{v}_\lambda(\theta, z) + v_\lambda(\theta, \lambda, z), \quad P = \overline{p}(\theta, z) + p(\theta, \lambda, z) \quad (1)$$

(z — высота над уровнем моря, $z = r - a_0$). Элементы возмущений v_θ, v_λ, p считаем малыми; решение заранее принимаем стационарным.

Основное движение представляем в виде:

$$\overline{v}_\lambda(\theta, z) = a_0\alpha(z)\sin\theta, \quad (2)$$

$$\overline{p}(\theta, z) = p_{00}(z) + a_0^2\omega\tilde{\rho}(z)\,\alpha(z)\sin^2\theta. \quad (3)$$

Здесь $\alpha(z)$ — зависящая только от z угловая скорость вращения атмосферы; $\tilde{\rho}(z)$ — стационарная плотность; $p_{00}(z)$ — стандартное давление на полюсе.

Температуру представляем в виде:

$$T = \overline{T}(\theta, z) + T'(\theta, \lambda, z), \quad (4)$$

где $\overline{T}(\theta, z) = T_0(z) + M(z)\sin^2\theta$.

Уравнение неразрывности позволяет приближенно ввести на всех уровнях функцию тока $\Psi(\theta, \lambda, z)$ из равенств

$$V_\theta = -\frac{1}{a_0 \sin\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}, \quad V_\lambda = \frac{1}{a_0} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \tag{5}$$

(члены с производными от плотности и члены с вертикальной скоростью в уравнении неразрывности пренебрежимо малы по сравнению с членами, содержащими V_θ и V_λ). Функцию Ψ мы представляем в виде: $\Psi = \overline{\psi}(\theta, z) + \psi(\theta, \lambda, z)$. Составляющие v_θ и v_λ скорости выразятся через ψ по формулам, аналогичным (5).

Проектируя уравнение Фридмана на ось r и отбрасывая члены второго порядка малости, мы получим с большой точностью:

$$\alpha \frac{\partial \Delta\psi}{\partial \lambda} + 2(\alpha + \omega) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 2a_0^2 \frac{\alpha\omega \cos\theta}{\widetilde{T}} \frac{\partial T'}{\partial \lambda} + \frac{2\omega \cos\theta}{\widetilde{\rho}} a_0^2 \frac{\partial (\widetilde{\rho} v_r)}{\partial z}. \tag{6}$$

Здесь ω — угловая скорость вращения Земли; $\widetilde{T} = \widetilde{T}(z)$ — стандартная температура (функция высоты z); v_r — вертикальная составляющая скорости,

$$\Delta\psi = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2}. \tag{7}$$

Если пренебречь в (6) членом, содержащим v_r, то уравнение (6) может служить (при заданной температуре) для определения ψ. При этом уравнение Эйлера, отвечающее оси λ:

$$\frac{1}{\widetilde{\rho} \sin\theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} = -\alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda\, \partial \theta} + 2(\alpha + \omega) \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \tag{8}$$

позволит определить p, и задача решается до конца. Это было сделано нами в ([1]).

Желая учесть член с v_r в (6), мы должны будем привлечь сперва барометрическую формулу:

$$P(\theta, \lambda, z) = P_0(\theta, \lambda) \exp\left[-\frac{g}{R} \int_0^z \frac{dz}{T(\theta, \lambda, z)}\right], \tag{9}$$

где $P_0(\theta, \lambda)$ — давление на уровне моря; g — ускорение силы тяжести; R — газовая постоянная.

Представляя P_0, аналогично P, в виде:

$$P_0(\theta, \lambda) = \overline{p}_0(\theta) + p_0(\theta, \lambda)$$

($\overline{p}_0(\theta) = \overline{p}(\theta, 0) = p_{00}(0) + \widetilde{\rho}(0)\, \alpha(0)\, a_0^2 \omega \sin^2\theta$, $p_0(\theta, \lambda) = p(\theta, \lambda, 0)$), мы можем заменить барометрическую формулу после ее линеаризации приближенным соотношением:

$$\frac{p}{\widetilde{P}} = \frac{p_0}{\widetilde{P}_0} + \frac{g}{R} \int_0^z \frac{1}{\widetilde{T}^2} T' dz \tag{10}$$

($\widetilde{P} = \widetilde{P}(z)$ — стандартное давление, $\widetilde{P}_0$ — стандартное давление на уровне моря).

В нашей задаче мы считаем T' известной функцией от θ, λ, z. Неизвестными, подлежащими определению, являются функции $p(\theta, \lambda, z)$, $p_0(\theta, \lambda)$, $\psi(\theta, \lambda, z)$, $v_r(\theta, \lambda, z)$. Для определения этих четырех функций будут служить уравнения (6), (8), (10) и краевые условия. В качестве краевых условий потребуем: 1) обращения в нуль v_r на поверхности Земли ($z=0$) и 2) обращения ρv_r в нуль при $z \to \infty$. Первое условие позволит определить по (6) v_r из равенства

$$2\omega a_0^2 \tilde{\rho} \cos\theta \, v_r = \int_0^z \left[\alpha \frac{\partial \Delta\psi}{\partial\lambda} + 2(\alpha+\omega)\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - 2\omega a_0^2 \alpha \frac{\cos\theta}{\tilde{T}} \frac{\partial T'}{\partial\lambda} \right] \tilde{\rho}\, dz. \tag{11}$$

Второе условие сводится к равенству

$$\int_0^\infty \left[\alpha \frac{\partial \Delta\psi}{\partial\lambda} + 2(\alpha+\omega)\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - 2a_0^2 \omega\alpha \frac{\cos\theta}{\tilde{T}} \frac{\partial T'}{\partial\lambda} \right] \tilde{\rho}\, dz. \tag{12}$$

Из (8) без труда можно найти явным образом ψ через p; уравнение (10) позволит определить p через p_0. Таким образом, мы можем представить ψ через p_0. Вставляя это выражение для ψ в (12), получим уравнение для определения давления на уровне моря p_0.

Остановимся сперва на приближенном способе решения задачи. Так как $\partial^2\psi / \partial\theta\,\partial\lambda$ и $\partial\theta / \partial\lambda$ имеют, вообще говоря, один и тот же порядок малости и в то же время $\alpha / \omega \ll 1$, то мы можем заменить (8) приближенным соотношением:

$$\psi = \frac{1}{2\omega\tilde{\rho}\cos\theta}\, p. \tag{13}$$

При этом (12) можно взять в виде

$$\int_0^\infty \left(\alpha \frac{\partial \Delta\psi}{\partial\lambda} + 2\omega \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \right) \tilde{\rho}\, dz = 2a_0^2\omega \int_0^\infty \frac{\partial\tau_1}{\partial\lambda} \alpha \tilde{T}\tilde{\rho}\, dz, \tag{14}$$

где $\tau_1 = \cos\theta \dfrac{T'(\theta, \lambda, z)}{[\tilde{T}(z)]^2}$.

Из (13), (10) и из уравнения состояния следует

$$\psi = \frac{R\tilde{T}}{2\omega}\left(\varphi + \frac{g}{R}\int_0^z \tau_2 dz \right), \tag{15}$$

где $\varphi = \dfrac{p_0(\theta, \lambda)}{\cos\theta \bar{P}_0}$, $\tau_2 = \dfrac{T'(\theta, \lambda, z)}{[\tilde{T}(z)]^2 \cos\theta}$.

Вставляя ψ из (15) в (12), получим уравнение для определения φ:

$$\alpha_1 \Delta\varphi + 2\omega\varphi = F(\theta, \lambda), \tag{16}$$

где $\alpha_1 = \int_0^\infty \alpha \tilde{T}\tilde{\rho}\, dz : \int_0^\infty \tilde{T}\tilde{\rho}\, dz$; $F(\theta, \lambda) = \dfrac{-g}{R\int_0^\infty \tilde{T}\tilde{\rho}\, dz} \displaystyle\int_0^\infty \left\{ \alpha \int_0^z \Delta\tau_2 dz + 2\omega \int_0^z \tau_2\, dz - \right.$

$\left. - \dfrac{4a_0^2\omega^2\alpha}{g}\tau_1 \right\} \tilde{T}\tilde{\rho}\, dz.$

Если F разлагается в ряд по шаровым функциям:

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} [F_n^m \cos m\lambda + F_n^{'m} \sin m\lambda]\, P_n^m \tag{17}$$

(F_n^m, $F_n^{'m}$ — известные постоянные), то φ найдется из (16) в виде ряда

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} [\varphi_n^m \cos m\lambda + \varphi_n^{'m} \sin m\lambda]\, P_n^m, \tag{18}$$

причем

$$\varphi_n^m = \frac{F_n^m}{2\omega - n(n+1)\alpha_1}, \quad \varphi_n^{'m} = \frac{F_n^{'m}}{2\omega - n(n+1)\alpha_1}. \tag{19}$$

Не представляет труда построить для уравнения (16) функцию Грина. При этом решению уравнения (16) можно придать вид

$$\varphi = -\frac{g}{\alpha_1 R \int\limits_0^\infty \tilde{\rho} \tilde{T} dz} \int\limits_0^\infty \alpha \left(\int\limits_0^z \tau_2 dz \right) \tilde{\rho} \tilde{T} dz +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} g(\theta', \lambda', \theta, \lambda) f(\theta', \lambda') \sin\theta' \, d\theta' \, d\lambda', \tag{20}$$

где

$$g(\theta', \lambda', \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2\omega - n(n+1)\alpha_1} P_n(\cos\gamma),$$

причем

$$\cos\gamma = \cos\theta \times \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\lambda - \lambda')$$

и

$$f(\theta', \lambda') =$$

$$= \frac{-g}{R \int\limits_0^\infty \tilde{\rho} \tilde{T} dz} \int\limits_0^\infty \left\{ 2\omega \left[1 - \frac{\alpha(z)}{\alpha_1} \right] \int\limits_0^z \tau_2(\theta', \lambda', z) \, dz - \frac{4\omega^2 a_0^2}{g} \alpha(z) \, \tau_1(\theta', \lambda', z) \right\} \tilde{\rho} \tilde{T} dz.$$

В заключение заметим, что можно дать решение, отвечающее полному уравнению (8). Здесь надо будет с самого начала представить все наши функции (ψ, p, p_0, T') в виде рядов по шаровым функциям. Задача сведется к последовательному определению коэффициентов ряда для ψ через коэффициенты ряда для p_0 с использованием каждый раз уравнения (14).

Центральный институт
прогнозов

Поступило
13 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Н. Блинова, ДАН, 39, № 7 (1943).