Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 3

ФИЗИКА

А. А. СОКОЛОВ и И. М. ТЕРНОВ

К ВОПРОСУ О ДВИЖЕНИИ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 22 VII 1953)

1. В настоящей работе наряду с изучением быстрых электронов в магнитном поле (1) мы находим также квантовые поправки к траектории движения. Указанную задачу проще всего решать в цилиндрических координатах r, φ, z (2-4).

Направляя постоянное магнитное поле H вдоль оси z, мы будем иметь для составляющих вектора потенциала следующие значения:

$$A_x = -{}^1/_2 yH, \quad A_y = {}^1/_2 xH, \quad A_z = 0. \tag{1}$$

Тогда решение уравнения Дирака

$$(E - c(\alpha \vec{\mathbf{P}}) - \rho_3 mc^2)\psi = 0,$$

где E — энергия электрона, а $\mathbf{P} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$ — его обобщенный импульс, будет иметь вид:

$$\psi_{1,3} = \frac{e^{ikz}}{\sqrt{L}}\frac{e^{il\varphi}}{\sqrt{2\pi}} f_{1,3}(\rho), \qquad \psi_{2,4} = \frac{e^{ikz}}{\sqrt{L}}\frac{e^{i(l+1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} f_{2,4}(\rho). \tag{2}$$

В равенстве (2) l является азимутальным квантовым числом; L — длина основного куба; волновое число $k = 2\pi\mu / L$ ($\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) будет характеризовать движение вдоль оси z, а величина ρ связана с радиусом $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ соотношением

$$\rho = \frac{eH}{2c\hbar} r^2 = \gamma r^2. \tag{3}$$

Для энергии E и для функции f мы находим следующие выражения:

$$E = c\hbar K = c\hbar\sqrt{k_0^2 + k^2 + 4\gamma n}; \tag{4}$$

$$f_{1,2,3,4} = e^{-\rho/2}\rho^{l/2}\sqrt{\frac{\gamma}{Ks!n!}}\begin{cases} A\sqrt{(K+k_0)n}\, Q_s^l(\rho), \\ iB\sqrt{K+k_0}\,\rho^{1/2} Q_s^{l+1}(\rho), \\ \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{K+k_0}}\left(\sqrt{4\gamma n}B + kA\right) Q_s^l(\rho), \\ \dfrac{i}{\sqrt{K+k_0}}\left(\sqrt{4\gamma n}A - kB\right)\rho^{1/2} Q_s^{l+1}(\rho), \end{cases} \tag{5}$$

где масса электрона $m = k_0\hbar / c$; $s = n - l - 1$ — радиальное квантовое число; $n = 1, 2, \ldots$ — главное квантовое число; коэффициенты A и B

характеризуют, как обычно, спиновое состояние электрона, а обобщенные полиномы Лагерра степени s определены формулой

$$Q_s^l(\rho) = (-1)^s \sum_{\mu=0}^{s} (-1)^\mu \frac{s!\,(s+l)!}{\mu!\,(s-\mu)!\,(s+l-\mu)!}\,\rho^{s-\mu}. \tag{6}$$

Строго говоря, l может изменяться в пределах от $-\infty$ до $n-1$. Однако нас интересует случай $l \gg 1$ и $s \ll l$.

2. Согласно квантовой теории квадрат радиуса траектории может быть вычислен по формуле

$$R^2 = \overline{r^2} = \int \psi^+ r^2 \psi\, d^3x = \frac{n}{\gamma}\left(1 + \frac{s+{}^1/_2}{n}\right) = R_0^2\left(1 + \frac{s+\frac{1}{2}}{n}\right), \tag{7}$$

где $d^3x = dx\,dy\,dz$ — элемент объема. Для квадратичной флуктуации радиуса (ширина траектории) мы имеем выражение:

$$\xi^2 = \overline{(r-\overline{r})^2} = \overline{r^2} - (\overline{r})^2 \simeq \frac{s+{}^1/_2}{2\gamma}. \tag{8}$$

Таким образом, при $s=0$ мы будем иметь круговые орбиты, а при $s>0$ некруговые. Некруговые орбиты напоминают собой эллиптические орбиты, появляющиеся при исследовании водородоподобных атомов.

Строго говоря, в случае плоского движения ($k=0$) вращающийся в постоянном магнитном поле электрон должен всегда двигаться по круговой орбите, радиус которой зависит от энергии электрона. Однако центр орбиты не является фиксированным, поэтому некруговую орбиту мы можем рассматривать как наложение круговых орбит с одним и тем же значением радиуса, но обладающих различными центрами. По квантовой теории суперпозиция подобных вырожденных состояний является вполне законной.

3. При переходе электрона из начального состояния n, s, $k=0$ (плоское движение) в другое состояние $n' = n - \nu$, s', k' частота излучения и интенсивность излучения, включая члены порядка ν/n, будут определяться, соответственно, выражениями:

$$\omega = c\varkappa = \frac{Kc}{\sin^2\theta}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\nu}{n}\beta^2\sin^2\theta}\right) \cong \frac{\nu\beta c}{R_0}\left(1 + \frac{\nu\beta^2\sin^2\theta}{4n}\right), \tag{9}$$

$$W_{nn'ss'} = I_{ss'}^2(x)\, W_{nn'}, \tag{10}$$

где

$$W_{nn'} = \frac{ce^2\beta^2}{8\pi}\oint d\Omega\varkappa^2 \left[(I_{n-1,\,n'}(x) - I_{n,\,n'-1}(x))^2 + \cos^2\theta\,(I_{n-1,\,n'}(x) + I_{n,\,n'-1}(x))^2 + \frac{\nu\beta}{n}\cos^2\theta\sin\theta\,(I_{n,\,n'}(x)\,I_{n-1,\,n'}(x) + I_{n-1,\,n'-1}(x)\,I_{n,\,n'-1}(x))\right], \tag{11}$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{K^2 - k_0^2}}{K}. \tag{12}$$

При выводе последних соотношений для волнового вектора $\vec{\varkappa}$ излучаемого фотона взяты сферические координаты ($\varkappa = \sqrt{\varkappa_x^2 + \varkappa_y^2 + \varkappa_z^2}$, θ, φ'), а для радиуса-вектора $\mathbf{r}$ электрона цилиндрические координаты ($r = \sqrt{x^2+y^2}$, φ, z). Не нарушая общности вывода, мы положили $\varphi' = \pi/2$, так что

$$(\vec{\varkappa}\,\mathbf{r}) = \varkappa\,(r\sin\theta\sin\varphi + z\cos\theta).$$

Кроме того мы произвели усреднение по начальным спиновым состояниям и просуммировали по конечным, т. е. положили

$$|A|^2 = |B|^2 = {}^1/_2, \quad A^+B = B^+A = 0,$$
$$|A'|^2 = |B'|^2 = 1, \quad A'^+B' = B'^+A' = 0.$$

Выражение (11) для $W_{nn'}$ было получено нами при исследовании задачи в декартовых координатах. Здесь

$$I_{\mu\mu'}(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu!\,\mu'!}}\, x^{\frac{\mu-\mu'}{2}} e^{-\frac{x}{2}} Q_{\mu'}^{\mu-\mu'}(x), \tag{13}$$

где $\mu = s, n$; $\mu' = s', n'$, а для величины x мы имеем значение:

$$x = \frac{n}{\beta^2 \sin^2\theta}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\nu}{n}\beta^2 \sin^2\theta}\right)^2 \cong \frac{\nu^2 \beta^2 \sin^2\theta}{4n}. \tag{14}$$

Для того чтобы получить общую интенсивность излучения, мы должны просуммировать (11) по всем возможным значениям s' и n':

$$W = \sum_{s'n'} W_{nn'ss'}. \tag{15}$$

Легко показать, что при любых значениях x

$$\sum_{s'=0}^{\infty} I_{ss'}^2(x) = 1, \tag{16}$$

и поэтому, подставляя в (11) асимптотическое значение для $I_{nn'}$ ([1])

$$I_{nn'}(x) \cong J_{n-n'}(\sqrt{x}(\sqrt{n} + \sqrt{n'})) \cong \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)}\, K_{1/3}\left(\frac{n-n'}{3}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{3/2}\right), \tag{17}$$

где

$$x_0 = n\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\nu}{n}}\right)^2, \tag{18}$$

мы найдем:

$$W_{nn'} = \frac{e^2\nu^2\beta^4 c}{3\pi^2 R_0^2}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \left\{\varepsilon^2 K_{2/3}^2\left(\frac{\nu}{3}\varepsilon^{3/2}\right) + \right.$$
$$\left. + \cos^2\theta\left(1 + \frac{\nu}{2n}\right)\varepsilon K_{1/3}^2\left(\frac{\nu}{3}\varepsilon^{3/2}\right)\right\}\left(1 + \frac{\nu}{2n}\right), \tag{19}$$

где

$$\varepsilon = 1 - \frac{x}{x_0} = (1 - \beta^2 \sin^2\theta)\left(1 + \frac{\nu}{2n} + O\left(\frac{\nu^2}{n^2}\right)\right). \tag{20}$$

Суммируя (19) по n', найдем выражение для полной интенсивности излучения (см. ([1]), формула (28)), из которого видно, что квантовые поправки имеют порядок ν / n.

Исследуем более подробно влияние множителя $I_{ss'}^2(x)$ на переходы с учетом изменения радиального квантового числа s. Пусть в начальном состоянии мы имеем круговую орбиту ($s = 0$). Тогда

$$I_{0s'}^2(x) = e^{-x}\frac{x^{s'}}{s'!},$$

причем, согласно (14), $x \sim \nu^2 / n$. Отсюда видно, что конечная орбита остается также круговой ($s' = 0$) только в случае, когда $\nu^2 / n \ll 1$.

Однако, как мы неоднократно подчеркивали ([3]), при вычислении полной интенсивности излучения члены порядка ν^2 / n сокращаются.

4. Для того чтобы исследовать вопросы, связанные с изменением радиуса траектории (сжатие орбит), найдем время перехода τ электрона с одного уровня на другой.

Учтем, что обратная величина времени τ является вероятностью перехода, т. е. отношением интенсивности излучения (см. (11)) к энергии $c\hbar\varkappa$ излученного кванта (для частоты $c\varkappa$ см. соотношение (9)):

$$\frac{1}{\tau} = \frac{W_{nn'ss'}}{c\hbar\varkappa}. \tag{21}$$

Тогда для изменения квадрата радиуса мы будем иметь выражение

$$\frac{dR^2}{dt} = \sum_{n',s'} \Delta R_1^2 \frac{1}{\tau}, \tag{22}$$

где величина $\Delta R_1^2 = R_{n's'}^2 - R_{ns}^2 = -\frac{n-n'+s-s'}{\gamma}$ представляет собой изменение квадрата радиуса при одном переходе.

Подставляя в (22) значение для $1/\tau$ и учитывая (16), а также соотношение

$$\sum_{s'} (s'-s) I_{ss'}^2(x) = x, \tag{23}$$

мы найдем:

$$\frac{dR^2}{dt} = -\frac{4}{3}\frac{e^2}{mc}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^3 \left\{1 - \frac{55\sqrt{3}}{12}\left(\frac{\hbar}{mcR_0}\right)\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 + \cdots\right\}. \tag{24}$$

Отсюда видно, что квантовые поправки, характеризующие изменение радиуса, имеют тот же порядок, что и квантовые поправки для интенсивности излучения. Полагая в последней формуле $\hbar \to 0$, мы получаем выражение для изменения радиуса, совпадающее с классическим ([3]).

Аналогичным способом легко также определить изменение квадрата ширины траектории ξ^2. Согласно (8) при одном переходе изменение ξ^2 будет равно

$$\Delta\xi_1^2 = \xi_{s'}^2 - \xi_s^2 = -\frac{s-s'}{2\gamma}.$$

Отсюда легко получить выражение для изменения ξ^2 в течение времени dt:

$$\frac{d\xi^2}{dt} = \sum_{n',s'} \Delta\xi_1^2 \frac{1}{\tau}.$$

Подставляя сюда значение $1/\tau$ из (21) и учитывая при этом равенства (16) и (23), получаем

$$\frac{d\xi^2}{dt} = \frac{55}{48\sqrt{3}}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^5\left(\frac{\hbar}{mcR_0}\right)\frac{e^2}{mc}. \tag{25}$$

Заметим, что это уширение траектории является чисто квантовым эффектом и не может быть объяснено с помощью классической теории.

Московский государственный
университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
9 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Соколов, Н. П. Клепиков, И. М. Тернов, ДАН, **89**, 665 (1953). [2] А. А. Соколов, ДАН, **67**, 1013 (1949). [3] Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов, Классическая теория поля, 1951. [4] А. А Соколов, Н. П. Клепиков, И. М. Тернов, ЖЭТФ, **23**, 632 (1952).