Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 3

ФИЗИКА

И. М. ВИЛЕНСКИЙ

О ВЛИЯНИИ НЕЛИНЕЙНОСТИ СРЕДЫ НА РАДИОВОЛНУ, РАСПРОСТРАНЯЮЩУЮСЯ В ИОНОСФЕРЕ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 18 VII 1953)

До сих пор в литературе рассматривался вопрос о взаимодействии в ионосфере двух радиоволн. Известно (см., например, ([1])), что при этом имеет место так называемый люксембург-горьковский эффект — наложение модуляции «сильной» волны на «слабую». Кроме того в ([2]) было показано, что при взаимодействии радиоволн возникают также волны с комбинационными несущими частотами. Ниже мы рассмотрим вопрос о том, как скажется возмущение ионосферы, вызванное сильными радиоволнами, на них самих.

Пусть мощная станция излучает монохроматические волны, которым на нижней границе ионосферы соответствует поле $\mathrm{E} = \mathrm{E}_0 \cos \omega t$. В ионосфере, в силу ее нелинейности, помимо частоты ω будут присутствовать еще ее обертоны. Если ограничиться учетом нелинейности в первом приближении, что мы и будем делать ниже, то в спектре будут присутствовать лишь частоты ω и 3ω (это обусловлено квадратичным характером нелинейности). Тогда поле в некоторой точке z ионосферы (ось z считаем направленной вертикально вверх, начало отсчета выбираем на нижней границе слоя) может быть представлено в виде:

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_\omega(z) \cos[\omega t - \varphi(z)] + \mathrm{E}_{3\omega}(z) \cos[3\omega t - \psi(z)]. \tag{1}$$

В дальнейшем будем считать, что $|\mathrm{E}_{3\omega}(z)| \ll |\mathrm{E}_\omega(z)|$.

Вычислим ток, возникающий в ионосфере под действием поля (1), используя для этого кинетические уравнения, полученные Б. И. Давыдовым ([3]).

Представим функцию распределения электронов в виде

$$f(\mathbf{v}) = f_0(v) + \frac{\mathbf{v}\mathrm{f}_1(v)}{v}; \quad |\mathrm{f}_1(v)| \ll |f_0(v)|. \tag{2}$$

Функции $f_0(v)$ и $\mathrm{f}_1(v)$ будут решениями уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\nu(v)\, v^2 kT}{\mu}\frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{m\nu(v)\, v^3}{\mu} f_0\right\} + \frac{e}{3mv^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^2 \mathrm{E}\mathrm{f}_1) = 0,\\ \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial t} + \frac{e}{m}\mathrm{E}\frac{f_0}{\partial v} + \nu(v)\mathrm{f}_1 = 0,\end{gathered} \tag{3}$$

где $\nu(v)$ — число соударений электронов с молекулами (влиянием соударений электронов с ионами и между собой для простоты пренебрегаем); k — постоянная Больтцмана; T — температура молекул; m, e — масса и заряд электронов; μ — масса молекул. При написании (3) мы отбросили пространственные производные (считаем среду однородной), а также не приняли во внимание магнитное поле Земли.

Решение системы (3) будем искать методом последовательных приближений, причем E возьмем в виде (1). При решении учтем малость величин $E_{3\omega}^2$ и $E_{3\omega}E_\omega$ по сравнению с E_ω^2. Кроме того, учтем, что $m/\mu \ll 1$, а также будем считать выполненным условие $\omega^2 \gg \nu^2(v)$. Найденное выражение для $\mathbf{f}_1$ подставим в формулу:

$$\mathbf{j}_t = \frac{4\pi Ne}{3}\int_0^\infty \mathbf{f}_1 v^3 dv, \tag{4}$$

где $\mathbf{j}_t$ — полный ток в ионосфере. Используем для $\nu(v)$ формулу

$$\nu(v) = \pi a^2 N_m v, \tag{5}$$

где N_m — число молекул в 1 см³; молекулу считаем твердым шариком радиуса a. Тогда получим:

$$\mathbf{j}_t = \mathbf{j}_{t,\,\omega} + \mathbf{j}_{t,\,3\omega}; \tag{6}$$

$$\mathbf{j}_{t,\,\omega} = \mathbf{E}_\omega\left\{\sigma(\omega)\cos[\omega t - \varphi(z)] - \omega\frac{\varepsilon(\omega)-1}{4\pi}\sin[\omega t - \varphi(z)]\right\} +$$
$$+ \sigma_1\mathbf{E}_\omega^3\left\{\cos[\omega t - \varphi(z)] + \frac{3\omega}{4\nu_{ef}}\sin[\omega t - \varphi(z)]\right\}; \tag{7}$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}; \quad \sigma(\omega) = \frac{e^2 N\nu_{ef}}{m\omega^2}; \quad \sigma_1 = \frac{\mu}{m}\frac{e^2\sigma(\omega)}{3mkT\omega^2};$$

$$\mathbf{j}_{t,3\omega} = \mathbf{E}_{3\omega}\left\{\sigma(3\omega)\cos[3\omega t - \psi(z)] - 3\omega\frac{\varepsilon(3\omega)-1}{4\pi}\sin[3\omega t - \psi(z)]\right\} -$$
$$- \frac{1}{9}\sigma_2\mathbf{E}_\omega^3\left\{\cos 3[\omega t - \varphi(z)] - \frac{9\pi\nu_{ef}}{32\omega}\sin 3[\omega t - \varphi(z)]\right\};$$

$$\sigma_2 = \frac{e^2\sigma(\omega)}{24m^2kT\omega^2}. \tag{8}$$

В формулах (7) и (8) N — число электронов в 1 см³; $\varepsilon(\omega)$ — диэлектрическая постоянная; $\sigma(\omega)$ — проводимость ионосферы; ν_{ef} — эффективное число соударений, которое вычисляется по формуле (1)

$$\nu_{ef} = \frac{4\pi a^2}{3}N_m\bar{v}; \quad \bar{v} = (8kT/\pi m)^{1/2}. \tag{9}$$

Выражения для $\mathbf{E}_\omega(z)$ и $\mathbf{E}_{3\omega}(z)$ найдем из уравнений Максвелла. Если среда однородна и изотропна и волна распространяется по оси z, то из уравнений Максвелла получим:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial j_t}{\partial t} = 0, \tag{10}$$

где под величинами E и j_t имеются в виду их проекции либо на ось x либо на ось y.

Уравнение (10) с учетом дисперсии нужно записать отдельно для каждой из частот ω, 3ω. Используя для $j_{t,\omega}$ формулу (7) и группируя отдельно члены с синусами и косинусами, получим систему уравнений для функций $E_\omega(z)$ и $\varphi(z)$. Эту систему решим методом последовательных приближений, считая малыми члены, содержащие E_ω^3. На границе среды (при $z = 0$) будем считать выполненным условие $(E_\omega)_{z=0} = E_0$. Тогда в первом приближении получим*:

* Приводимые ниже формулы останутся в силе и в случае слабо неоднородной среды с заменой в них величин $k(\omega)z$ и $n(\omega)z$ на $\int_s k(\omega)\,ds$ и $\int_s n(\omega)\,ds$, где s — путь волны в среде.

$$E_\omega(z) = E_0(1-\gamma)\,e^{-\frac{\omega}{c}k(\omega)z}; \quad \varphi(z) = \frac{\omega}{c}n(\omega)z - \alpha;$$

$$\gamma = \frac{\mu}{m}\frac{e^2E_0^2}{3mkT\omega^2}\frac{3+\varepsilon(\omega)}{8\varepsilon(\omega)}\left(1 - e^{-\frac{2\omega}{c}k(\omega)z}\right); \tag{11}$$

$$\alpha = \frac{\mu}{m}\frac{e^2E_0^2}{3mkT\omega^2}\frac{3\omega}{8\nu_{ef}}\left(1 - e^{-\frac{2\omega}{c}k(\omega)z}\right),$$

где

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon(\omega)}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\sigma(\omega)}{\omega}\right)^2}};$$

$$k(\omega) = \sqrt{-\frac{\varepsilon(\omega)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon(\omega)}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\sigma(\omega)}{\omega}\right)^2}}. \tag{12}$$

При написании (11) мы считали выполненным условие $\varepsilon(\omega) \gg 4\pi\sigma(\omega)/\omega$, что обычно имеет место (за исключением области отражения).

Решение уравнения для $E_{3\omega}$, удовлетворяющее граничному условию $(E_{3\omega})_{z=0} = 0$, при не очень малых z, когда $\frac{3\omega}{c}nz \gg 1$, имеет вид *

$$E_{3\omega}(z, t) = \frac{e^2E_0^3\nu_{ef}}{(24)^2mkT\omega^3}\,e^{-\frac{3\omega}{c}k(3\omega)z}\cos[3\omega t - \psi(z)];$$

$$\psi(z) = \frac{3\omega}{c}n(3\omega)z + \frac{\pi}{2}. \tag{13}$$

Таким образом, учет нелинейности приводит к возникновению обертона 3ω и к некоторому измененню амплитуды и фазы основного тона. Приведем оценки величин, характеризующих нелинейность. При этом учтем, что величину $2m/\mu = \delta_{\text{уп}}$, характеризующую долю энергии, терямой электроном при упругом соударении с молекулой, с учетом неупругих ударов нужно заменить на некоторое среднее значение δ_0. Примем, согласно ([4]), $\delta_0 = 2\cdot 10^{-3}$. Величину E_0 напряженности поля на нижней границе ионосферы будем вычислять по формуле

$$E_0 = \left(\frac{300\sqrt{W\,\text{кв}}}{r\,\text{км}}\right)\frac{\text{мв}}{\text{м}} = \left(10^{-5}\frac{\sqrt{W\,\text{кв}}}{r\,\text{км}}\right)\text{CGSE}.$$

Полагая $r \sim 100$ км, $T \sim 300°$ K, $W \sim 100$ квт, $\omega \sim 3\cdot 10^6$, $\varepsilon(\omega) \backsim 1$, $\frac{2\omega}{c}k(\omega)z \geqslant 1$, получим $\gamma \sim 10\%$. Далее, при $\nu_{ef} \sim 10^5$ и тех же остальных данных получим $\alpha \sim 2{,}5$. Амплитуда обертона $E_{3\omega}$ оказывается при этом очень малой. Если же положить $W = 500$ квт, $\omega \backsim 10^6$, для $E_{3\omega}$ получим $|E_{3\omega}| \sim 0{,}1 \div 1\,\frac{\text{мкв}}{\text{м}}$ — величину малую, но доступную для наблюдения.

Из приведенных оценок видно, что связанные с нелинейностью среды изменения амплитуды и фазы основного типа могут быть существенными и их необходимо учитывать при распространении сильных радиоволн. Величина обертона $E_{3\omega}$ обычно мала, но при благоприятных условиях доступна для наблюдения.

Заметим, что условие $|E_{3\omega}| \ll |E_\omega|$, использованное нами выше, слабее условия $\gamma \ll 1$, которое используется при приближенном решении уравнений для E_ω. Последнее же условие, как видно из оценок, для мощных станций $W \geqslant 300$—500 квт, уже нельзя считать выполненным. В этом случае задачу нужно решать точнее, с учетом следующих приближений.

---

* Заметим, что, поскольку выражение (8) линейно относительно $E_{3\omega}$, то в данном случае при вычислении удобнее пользоваться комплексными величинами.

Рассмотрим теперь случай, когда на ионосферу падает модулированная по амплитуде волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 (1 + M \cos \Omega t) \cos \omega t$, где M — глубина модуляции, Ω — частота модуляции. Расчет этого случая аналогичен предыдущему. Мы приведем результаты вычислений для предыдущих случаев высоких и низких частот модуляции.

В случае малых Ω получено:

$$E_\omega(z) = E_0 e^{-\frac{\omega}{c}k(\omega)z} \left(1 - \gamma - \frac{3}{2}\gamma M^2\right) \{1 + M \cos \Omega t -$$

$$- M_{2\Omega} \cos 2\Omega t - M_{3\Omega} \cos 3\Omega t\} \cos \left\{\omega t - \frac{\omega}{c} n(\omega) z + \alpha\left(1 + \frac{M^2}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \beta_\Omega \cos \Omega t + \beta_{2\Omega} \cos 2\Omega t\right\};$$

$$M_\Omega = \frac{M(1 - 3\gamma - {}^3/_4\gamma M^2)}{1 - \gamma - {}^3/_2\gamma M^2}; \quad M_{2\Omega} = \frac{{}^3/_2\gamma M^2}{1 - \gamma - {}^3/_2\gamma M^2}; \quad M_{3\Omega} = \frac{{}^1/_4\gamma M^3}{1 - \gamma - {}^3/_2\gamma M^2};$$

$$\beta_\Omega = 2\alpha M; \quad \beta_{2\Omega} = \alpha \frac{M^2}{2}; \quad \Omega \ll \frac{2m}{\mu} \nu_{ef}. \tag{14}$$

В случае больших Ω получено:

$$E_\omega(z) = E_0 e^{-\frac{\omega}{c}k(\omega)z} \left[1 - \gamma\left(1 + \frac{M^2}{2}\right)\right] \times$$

$$\times \{1 + M'_\Omega \cos(\Omega t - \zeta) - M'_{2\Omega} \sin 2\Omega t - M'_{3\Omega} \sin 3\Omega t\} \times$$

$$\times \cos \left\{\omega t - \frac{\omega}{c} n(\omega) z + \alpha\left(1 + \frac{M^2}{2}\right) - \beta'_\Omega \sin \Omega t - \beta'_{2\Omega} \sin 2\Omega t\right\}; \tag{15}$$

$$M'_\Omega = \frac{M}{1 - \gamma(1 + M^2/2)}; \quad M'_{2\Omega} = \frac{5M^2}{8[1 - \gamma(1 + M^2/2)]} \frac{3\pi e^2 E_0^2 \nu_{ef}}{64mkT\omega^2\Omega};$$

$$M'_{3\Omega} = \frac{2}{5} M'_{2\Omega} M; \quad \beta'_\Omega = \frac{3\pi^2 N e^4 E_0^2 \nu_{ef}^2 M}{16m^2 kT\omega^5 \Omega n^2(\omega)}; \quad \beta'_{2\Omega} = \beta'_\Omega \frac{M}{8};$$

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{3\pi e^2 E_0^2 \nu_{ef}}{64mkT\omega^2\Omega} \frac{1 - M^2/16}{1 - \gamma(1 + M^2/2)}; \quad \Omega \gg \frac{2m}{\mu} \nu_{ef}.$$

Из формул (14), (15) видно, что учет нелинейности приводит в данном случае не только к изменению амплитуды и фазы волны, но и к изменению глубины амплитудной модуляции, к возникновению высших гармоник 2Ω, 3Ω амплитудной модуляции и к появлению фазовой модуляции. Как показывают оценки, изменение глубины основного тона и величины обертонов амплитудной модуляции могут быть существенными. Индекс фазовой модуляции значителен при малых Ω и весьма мал при больших Ω.

Изучение указанных выше нелинейных эффектов, помимо непосредственного значения для практики радиосвязи, может дать ценные сведения о ионосферных параметрах, например о величине ν_{ef}. Постановка экспериментальных исследований в данном случае проще, чем постановка экспериментальных исследований по кросс-модуляции.

Вопрос о влиянии нелинейных свойств ионосферы на коэффициент поглощения распространяющихся в ней радиоволн рассматривался ранее в работе ([5]), однако недостаточно корректно.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. В. Л. Гинзбургу за постоянный интерес к работе и ценные советы.

Поступило
7 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Л. Гинзбург, Теория распространения радиоволн в ионосфере, 1949. [2] И. М. Виленский, ЖЭТФ, 22, 544 (1952). [3] Б. И. Давыдов, ЖЭТФ, 7, 1069 (1937). [4] L. G. Huxley, Nuovo Cimento, 9, 59 (1952). [5] В. П. Целищев, ЖТФ, **10**, 1630 (1940).