Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 5

МЕХАНИКА

Н. А. КИЛЬЧЕВСКИЙ

О ФУНКЦИЯХ НАПРЯЖЕНИЙ, СКОРОСТЕЙ И ПЛОТНОСТИ В СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕДИН

(Представлено академиком М. В. Келдышем 10 VIII 1953)

До последнего времени функции напряжений применялись главным образом при решении статических задач теории упругости. Лишь недавно И. С. Аржаных ввел функции тензора напряжений в гидродинамику ([1]).

В настоящей работе мы рассмотрим новый способ введения обобщенных функций напряжений в статических и динамических задачах механики сплошной среды, отличающийся от способа И. С. Аржаных. Преимуществом предлагаемого способа, в частности, является исключение некоторых лишних функций, входящих в формулы И. С. Аржаных.

Как известно, компоненты тензора напряжений, компоненты вектора скорости элемента сплошной среды и плотность среды ρ входят в состав некоторого четырехмерного тензора второго ранга, который в системе координат Декарта определяется матрицей

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} \rho v_x^2 - \sigma_x & \rho v_x v_y - \tau_{xy} & \rho v_x v_z - \tau_{xz} & \rho v_x \\ \rho v_x v_y - \tau_{yx} & \rho v_y^2 - \sigma_y & \rho v_y v_z - \tau_{yz} & \rho v_y \\ \rho v_x v_z - \tau_{zx} & \rho v_y v_z - \tau_{zy} & \rho v_z^2 - \sigma_z & \rho v_z \\ \rho v_x & \rho v_y & \rho v_z & \rho \end{Vmatrix}. \tag{1}$$

Уравнение движения элемента сплошной среды при отсутствии объемных сил и уравнение неразрывности можно представить в четырехмерном пространстве в форме тензорного равенства:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = 0. \tag{2}$$

Здесь четвертой координатой является время.

В произвольной криволинейной системе координат x^i уравнение (2) эквивалентно системе уравнений

$$\partial_i T^{ik} + \Gamma^i_{i\mu} T^{\mu k} + \Gamma^k_{i\mu} T^{i\mu} = 0 \quad (i, k, \mu = 1, 2, 3, 4). \tag{3}$$

Здесь $\partial_i = \partial / \partial x^i$; $\partial_4 = \partial / \partial t$; Γ^l_{jk} — символы Кристоффеля второго рода; T^{ik} — контравариантные компоненты тензора $\mathbf{T}$.

Рассмотрим криволинейную систему координат, мало отличающуюся от системы координат Декарта. Линейный элемент пространства в этой системе имеет вид:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{4}$$

Положим

$$g_{ik} = \delta_{ik} + \varphi_{ik}(x^j); \qquad \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k; \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \tag{5}$$

где функции $\varphi_{ik}(x^j)$ по абсолютным величинам для всех значений x^j значительно меньше единицы. Предположим, что метрика пространства, определенная равенством (4), отличается от евклидовой.

Временно допустим, что функции g_{ik} определяют метрику деформированной среды. Тогда в уравнениях (3) члены, содержащие символы Кристоффеля, будут малы по сравнению с членами $\partial_i T^{ik}$. Если пренебречь членами, содержащими символы Кристоффеля, то мы вновь возвратимся к уравнениям движения элемента сплошной среды в системе координат Декарта.

Теперь рассмотрим тензор второго ранга

$$P^{ik} = R^{ik} - {}^1/_2 g^{ik} R, \tag{6}$$

где скаляр R — след тензора кривизны, R^{ik} — контравариантные компоненты свернутого тензора кривизны.

Тензор кривизны определяется через компоненты метрического тензора g_{ik} или через функции $\varphi_{ik}(x^j)$. Тензор P^{ik} хорошо известен из современной теории тяготения.

Если положить

$$T^{ik} = P^{ik} = R^{ik} - {}^1/_2 g^{ik} R, \tag{7}$$

то уравнения (3) *тождественно удовлетворяются* ([2]).

Положим

$$\varphi_{ik}(x^j) = \varepsilon \Phi_{ik}(x^j), \tag{8}$$

где ε — произвольный малый параметр.

Тогда тензор T^{ik}, определенный равенством (7), можно представить так:

$$T^{ik} = \varepsilon Q^{ik}_{(1)} + \varepsilon^2 Q^{ik}_{(\,)} + \ldots \tag{9}$$

С другой стороны, уравнения (3) приобретут вид:

$$\partial_i T^{ik} + \varepsilon S^k = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{10}$$

На основании отмеченного выше свойства тензора P^{ik} после очевидного сокращения на ε получим тождества:

$$\partial_i Q^{ik}_{(1)} + \varepsilon U^k_{(1)} + \ldots \equiv 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{11}$$

Эти тождества справедливы при любых значениях ε.

Положим теперь $\varepsilon = 0$. Это равносильно возвращению к евклидовой метрике в деформированной среде.

Найдем:

$$\partial_i Q^{ik}_{(1)} \equiv 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{12}$$

Мы приходим к следующей теореме:

Если положить

$$T^{ik} = Q^{ik}_{(1)}, \tag{13}$$

то уравнения движения элемента сплошной среды в системе координат Декарта при отсутствии объемных сил будут тождественно удовлетворены.

Функции $Q^{ik}_{(1)}$ линейно выражаются через вторые производные от функций $\Phi_{ik}(x^j)$. Функции $\Phi_{ik}(x^j)$ являются обобщенными функциями напряжений.

Число функций $\Phi_{ik}(x^j)$ не превышает числа компонентов метрического тензора в четырехмерном пространстве, т. е. равно в общем случае 10. В работе И. С. Аржаных ([1]) введена 21 функция.

Если заметить, что тензор **T**, определенный матрицей (1), выражается через 10 функций: 6 компонентов трехмерного тензора напряжений, 3 компонента вектора скорости и плотность среды, то становится ясным, что число обобщенных функций напряжений не должно превышать 10.

Число этих функций может быть в еще большей степени ограничено в частных случаях.

Как простейший пример применения указанного метода рассмотрим плоскую статическую задачу теории упругости.

В статических задачах можно определять ds^2 в трехмерном пространстве, так как уравнения (3) в этом случае сводятся к 3 уравнениям.

Согласно формулам (4), (5) и (8) положим:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + [1 + \varepsilon\Phi(x, y)]\, dz^2. \tag{14}$$

Вычисляя по формулам геометрии Римана компоненты тензора кривизны и пользуясь равенствами (13), получим:

$$\sigma_x = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}; \tag{15}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = v_x = v_y = v_z = 0.$$

Мы пришли к известным формулам Эри.

Аналогично можно получить все остальные классические подстановки теории упругости. Точно так же вводятся функции Φ_{ik} в динамических задачах. Здесь, строго говоря, нельзя называть Φ_{ik} функциями напряжений, так как в этих случаях тензор напряжений заменяется тензором **T**.

Рассмотрим как дальнейший пример простейшее обобщение плоской статической задачи.

Пусть ds^2 определяется равенством:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + [1 + 2\varepsilon\Phi_1(x, y, t)]\, dz^2 + [1 + 2\varepsilon\Phi_2(x, y, t)]\, dt^2. \tag{16}$$

Применяя указанный нами метод, получим:

$$\begin{gathered}
\rho v_x^2 - \sigma_x = -\frac{\partial}{\partial y^2}(\Phi_1 + \Phi_2) - \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}; \quad \rho v_y^2 - \sigma_y = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Phi_1 + \Phi_2) - \frac{\partial^2\Phi_1}{dt^2}; \\
\rho v_z^2 - \sigma_z = -\nabla^2\Phi_2; \quad \rho v_x v_y - \tau_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\Phi_1 + \Phi_2); \\
\rho v_x v_z - \tau_{xz} = \rho v_y v_z - \tau_{yz} = 0; \\
\rho v_x = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\,\partial t}; \quad \rho v_y = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y\,\partial t}; \quad \rho v_z = 0; \\
\rho = -\nabla^2\Phi_1.
\end{gathered} \tag{17}$$

Нетрудно непосредственно убедиться, что при этом уравнения движения (3) в системе координат Декарта x, y, z тождественно удовлетворяются.

Формулы (17) определяют движение элемента сплошной среды в плоскости XOY. Они являются ближайшим, простейшим обобщением формул Эри.

Для дальнейшего определения функций Φ_{ik} нужно воспользоваться зависимостями между тензором напряжений и тензором деформаций или тензором скоростей деформаций.

В заключение выскажем следующее общее утверждение:

Каждой задаче механики сплошной среды соответствует некоторое ассоциированное пространство с метрикой, определяющейся обобщенными функциями напряжений $\Phi_{ik}(x^j)$.

Поступило
14 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Аржаных, ДАН, 83, № 2, 195 (1952). [2] В. Паули, Теория относительности, § 56, 1947.