

С. Н. ЧЕРНИКОВ

ГРУППЫ С СИСТЕМАМИ ДОПОЛНЯЕМЫХ ПОДГРУПП

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 VI 1953)

Результаты, содержащиеся в настоящей статье, существенным образом связаны с понятием дополняемой подгруппы. Подгруппа \mathfrak{A} группы \mathfrak{G} называется дополняемой в \mathfrak{G} , если существует такая подгруппа \mathfrak{B} группы \mathfrak{G} , что

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \text{ и } \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = 1.$$

Произведение здесь не предполагается прямым. Каждая подгруппа \mathfrak{B} группы \mathfrak{G} , удовлетворяющая этим условиям, называется дополнением подгруппы \mathfrak{A} в \mathfrak{G} .

Так как единичная подгруппа дополняема во всякой группе, то каждая группа обладает некоторой (правда, быть может, и не очень обширной) системой дополняемых подгрупп. Понятно, что в некоторых группах система дополняемых подгрупп может быть весьма обширной и даже совпадать, в частности, с совокупностью всех подгрупп группы (конечные группы такого рода изучались Холлом ⁽¹⁾), бесконечные — Н. В. Баевой ⁽²⁾.

Если в группе \mathfrak{G} дополняема каждая подгруппа из некоторой выделенной системы S ее подгрупп, то группу \mathfrak{G} будем называть факторизуемой относительно системы S .

Группам, факторизуемым относительно тех или иных специально выделенных систем подгрупп, и посвящена настоящая статья.

Группам, факторизуемым относительно системы всех своих подгрупп, посвящена выполненная под руководством автора кандидатская диссертация Н. В. Баевой ⁽²⁾. Один из основных результатов диссертации Н. В. Баевой приводится ниже в следствии теоремы 7. В настоящей статье этот результат получил существенное развитие в разных направлениях (см. теоремы 5 и 7 и следствия 1 и 2 теоремы 3).

1. Теорема 1. *Абелева группа тогда и только тогда факторизуема относительно системы своих сервантных подгрупп, когда она разлагается в такое прямое произведение неразложимых циклических и локально циклических групп, которое не содержит: 1) неизоморфных неполных множителей без кручения, 2) бесконечной последовательности неполных множителей без кручения, 3) бесконечной последовательности циклических множителей, являющихся p -группами по одному и тому же простому числу p и имеющих неограниченно возрастающие порядки.*

Следствие 1. Периодическая абелева группа тогда и только тогда факторизуема относительно системы своих сервантных подгрупп, когда она разлагается в прямое произведение полной группы и примарных групп с ограниченными в совокупности порядками элементов.

Следствие 2. Абелева группа без кручения тогда и только тог-

да факторизуема относительно системы своих сервантных подгрупп, когда она является либо полной группой, либо прямым произведением полной группы и конечного множества изоморфных между собой абелевых групп первого ранга.

Следствие 3. Смешанная абелева группа \mathfrak{G} тогда и только тогда факторизуема относительно системы своих сервантных подгрупп, когда она является прямым произведением абелевой группы без кручения и периодической абелевой группы, факторизуемых относительно систем своих сервантных подгрупп.

Если прямое произведение с описанными в теореме 1 свойствами назвать сервантно замкнутым разложением абелевой группы, то имеет место:

Теорема 2. Пусть \mathfrak{G} — абелева группа, обладающая сервантно замкнутым разложением T . Тогда для дополняемости в \mathfrak{G} всех сервантных подгрупп группы \mathfrak{G} произведениями членов разложения T достаточно, чтобы оно содержало не более одного неполного множителя без кручения.

2. Если абелева группа \mathfrak{A} содержится в некоторой группе \mathfrak{G} , то из дополняемости в группе \mathfrak{A} всех ее сервантных подгрупп вовсе не вытекает, даже в случае, когда \mathfrak{A} — нормальный делитель группы \mathfrak{G} , их дополняемость в \mathfrak{G} . Условия, при которых все сервантные подгруппы абелева нормального делителя группы \mathfrak{G} оказываются дополняемыми в \mathfrak{G} , содержит теорема 3.

Теорема 3. Если все сервантные подгруппы абелева нормального делителя \mathfrak{A} группы \mathfrak{G} дополняемы в \mathfrak{G} , то группа \mathfrak{A} , во-первых, сама дополняема в \mathfrak{A} и, во-вторых, обладает так им сервантно замкнутым разложением, все члены которого инвариантны в \mathfrak{G} (т. е. являются нормальными делителями группы \mathfrak{G}).

Если абелев нормальный делитель \mathfrak{A} группы \mathfrak{G} дополняем в \mathfrak{G} и существует такое его сервантно замкнутое разложение, все члены которого инвариантны в \mathfrak{G} и которое содержит не более одного неполного члена, являющегося группой без кручения, то все сервантные подгруппы группы \mathfrak{A} дополняемы в \mathfrak{G} .

Если группа \mathfrak{A} обладает сервантно замкнутым разложением, содержащим более одного неполного члена без кручения, то предложение, обратное первому предположению теоремы, может оказаться неверным.

Следствие 1. Группа \mathfrak{G} тогда и только тогда факторизуема относительно системы всех подгрупп некоторого ее абелева нормального делителя \mathfrak{A} , когда группа \mathfrak{A} дополняема в \mathfrak{G} и разлагается в прямое произведение инвариантных в \mathfrak{G} циклических подгрупп простого порядка.

Следствие 2. Группа \mathfrak{G} , разлагающаяся в полупрямое произведение $[\mathfrak{A}]\mathfrak{B}$ (квадратными скобками будет отмечаться нормальный делитель в полупрямом произведении) двух абелевых подгрупп \mathfrak{A} и \mathfrak{B} , тогда и только тогда факторизуема как относительно системы всех подгрупп группы \mathfrak{A} , так и относительно системы всех подгрупп группы \mathfrak{B} , когда обе группы \mathfrak{A} и \mathfrak{B} разлагаются в прямые произведения циклических групп простого порядка и когда все члены хотя бы одного из таких разложений группы \mathfrak{A} инвариантны в \mathfrak{G} .

Группу \mathfrak{G} описанной здесь структуры назовем группой структуры F или просто F -группой и заметим, что такая группа, очевидно, факторизуема относительно системы всех своих подгрупп (вполне факторизуема).

Следствие 3. Группа \mathfrak{G} тогда и только тогда факторизуема относительно системы всех полных подгрупп некоторого ее полного абелева нормального делителя \mathfrak{A} , когда группа \mathfrak{A} дополняема в \mathfrak{G} и разлагается в прямое произведение инвариантных в \mathfrak{G} неразложимых полных подгрупп.

Отсюда вытекает, в частности, что если группа \mathfrak{G} , являющаяся полупрямым произведением $[\mathfrak{U}]\mathfrak{Z}$ двух своих полных абелевых подгрупп \mathfrak{U} и \mathfrak{Z} , факторизуема относительно системы всех полных подгрупп группы \mathfrak{U} , то она абелева.

Следствием этого предложения является

Теорема 4. Если группа \mathfrak{G} , обладающая возрастающим нормальным рядом с полными абелевыми факторами, факторизуема относительно системы своих полных абелевых подгрупп, то она сама является полной абелевой группой.

3. В предыдущем пункте рассматривались группы, факторизуемые относительно некоторых систем своих абелевых подгрупп. В связи с этим естественно обратиться к рассмотрению групп, факторизуемых относительно системы всех своих абелевых подгрупп. Строение таких групп в достаточной степени характеризуется следующими предложениями.

Теорема 5. Локально конечная группа \mathfrak{G} тогда и только тогда факторизуема относительно системы своих абелевых подгрупп, когда она является F -группой.

Теорема 6. Если группа \mathfrak{G} факторизуема относительно системы своих абелевых подгрупп, то она является периодической группой с порядками элементов, не делящимися на квадраты простых чисел, и обладает таким убывающим рядом нормальных делителей, последовательные факторы которого являются элементарными абелевыми p -группами с возрастающими простыми p . В частности, p -группы, факторизуемые относительно системы своих абелевых подгрупп, являются элементарными абелевыми группами.

Следствие. Если множество простых делителей порядков элементов группы \mathfrak{G} , факторизуемой относительно системы абелевых подгрупп, является конечным, то она вполне факторизуема.

Теорема 7. Если группа \mathfrak{G} факторизуема как относительно системы абелевых подгрупп, так и относительно системы всевозможных своих инвариантных силовских π -подгрупп, то она является F -группой и, значит, вполне факторизуема.

Следствие. Всякая вполне факторизуемая группа имеет структуру F .

Так как каждая группа структуры F локально конечна ⁽³⁾ и, очевидно, вполне факторизуема, то из теоремы 5 и следствия теоремы 7 вытекает, что класс групп, факторизуемых относительно системы всех своих подгрупп, совпадает с классом локально конечных групп, факторизуемых относительно системы своих абелевых подгрупп.

4. Если группа факторизуема относительно некоторой системы S своих нормальных делителей, то будем называть ее нормализуемой относительно системы S . Если система S совпадает с множеством всех нормальных делителей группы \mathfrak{G} , то последнюю назовем просто нормализуемой.

Теорема 8. Если группа, обладающая центральными множествами, нормализуема относительно системы всех членов хотя бы одного из них, то она коммутативна.

Следствие 1. Если нормализуемая группа \mathfrak{G} обладает центральным множеством, то она является прямым произведением элементарных абелевых групп.

Следствие 2. Если локально нильпотентная группа нормализуема, то она является прямым произведением элементарных абелевых групп. В частности, каждая нормализуемая локально конечная p -группа является элементарной абелевой.

Теорема 9. Нормализуемая группа тогда и только тогда вполне факторизуема, когда она обладает главным периодическим ря-

дом, т. е. возрастающим главным рядом с циклическими факторами простого порядка.

Следствие. Группа, обладающая главным периодическим рядом, тогда и только тогда нормализуема, когда она является F -группой.

Теорема 10. Среди групп, обладающих возрастающим главным рядом с циклическими и локально циклическими факторами, нормализуемыми могут быть лишь группы с главным периодическим рядом.

Поступило
27 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ph. Hall, J. London Math. Soc., 12, 201 (1937). ² Н. В. Баева, Вполне факторизуемые группы, Автореферат кандидатской диссертации, Молотовский ун-т, 1953. ³ С. Н. Черников, Матем. сборн., 7, 49, 1, 35 (1940).