Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 5

*МАТЕМАТИКА*

Л. И. РОНКИН

# ОБ АППРОКСИМАЦИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

*(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 11 VIII 1953)*

Б. М. Левитан [1] доказал следующую теорему об аппроксимации целых функций тригонометрическими полиномами:

*Всякую ограниченную на вещественной оси целую функцию $F(z)$ конечной степени $\sigma$ можно на любом конечном интервале вещественной оси приблизить с произвольной точностью тригонометрическими полиномами вида*

$$S_h(x) = \sum_{k=-m(h)}^{m(h)} a_k e^{i\lambda_k(h)x} \tag{1}$$

*($\lambda_k(h) = k d(h)$, где $d(h)$ не зависит от $k$) так, чтобы не выполнялись неравенства*

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |S_h(x)| \leqslant \sup |F(x)|; \quad \max_k |\lambda_k(h)| \leqslant \sigma.$$

Различные доказательства этой теоремы можно найти в статьях [2-4]. Используя метод доказательства Н. И. Ахиезера и В. А. Марченко, можно получить для ограниченных целых функций нескольких переменных теорему, аналогичную теореме Левитана.

Теорема 1. *Пусть $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — целая функция конечной степени $\sigma$ $\left(\sigma = \overline{\lim\limits_{(|z_1|+\ldots+|z_n|)\to\infty}} \dfrac{\ln|F(z_1, z_2, \ldots, z_n)|}{|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|}\right)$ и*

$$\sup_{-\infty<x_i<\infty,\ i=1,2,\ldots,n} |F(x_1, x_2, \ldots, x_n)| = M < \infty.$$

*Тогда существует последовательность тригонометрических полиномов вида*

$$S_h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=-m_1(h)}^{m_1(h)} \cdots \sum_{k_n=-m_n(h)}^{m_n(h)} a_{k_1k_2\ldots k_n} e^{i(\lambda_{k_1}(h)x_1+\lambda_{k_2}(h)x_2+\ldots+\lambda_{k_n}(h)x_n)}$$

*($\lambda_{k_i}(h) = k_i d_i(h)$, где $d_i(h)$ не зависит от $k$) таких, что*

$$S_h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ при } h\to 0$$

*равномерно в каждой конечной области,*

$$\max_{k_i} |\lambda_{k_i}(h)| \leqslant \sigma, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

*и*

$$\sup_{-\infty<x_i<\infty,\ i=1,2,\ldots,n} |S_h(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant \sup |F(x_1, x_2, \ldots, x_n)|.$$

Обобщения теоремы Левитана велись в направлении распространения ее на возможно более широкий класс функций. В статье Н. И. Ахиезера ([5]) теорема Левитана обобщается на целые функции конечной степени (ц. ф. к. с.), растущие на вещественной оси как полином. Аналогичный результат есть у С. Н. Бернштейна ([4]). В статье С. Н. Бернштейна ([6]) доказывается теорема, эквивалентная обобщению теоремы Левитана на ц. ф. к. с., допускающие на вещественной оси целую четную мажоранту нулевого рода. Наиболее широкое обобщение теоремы Левитана было получено В. А. Марченко ([7]). Работа Марченко и послужила для нас отправным пунктом.

Основным результатом нашей работы является

Теорема 2. *Пусть некоторая положительная функция* $\alpha(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *стремится к бесконечности при* $\sqrt{t_1^2+t_2^2+\ldots+t_n^2} \to \infty$. *Пусть, далее, существует* $n$ *положительных функций* $\alpha_k(t)$, *удовлетворяющих условиям:*

а) *при любых* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *справедливо неравенство*

$$\alpha_1(t_1)\,\alpha_2(t_2), \ldots, \alpha_n(t_n) \geqslant \alpha(t_1, t_2, \ldots, t_n);$$

б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \alpha_k(t)}{1+t^2}\,dt < \infty;$

*и либо условию*

в) $\alpha_k(t_2) \geqslant \alpha_k(t_1)$ *при* $|t_2| \geqslant |t_1|$,

*либо условию*

г) *неравенство* $\alpha_k(x)\,\alpha_k(y) \geqslant \alpha_k(x+y)$ *справедливо при любых* $x$ *и* $y$.

*Тогда для каждой целой функции* $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *конечной степени* $\sigma$, *удовлетворяющей условию*

$$\sup_{\substack{-\infty<x_i<\infty \\ i=1,2,\ldots,n}} \left| \frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| = M < \infty,$$

*существует последовательность тригонометрических полиномов вида* (1) *таких, что* $S_h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *при* $h \to 0$ *равномерно в каждой конечной области*

$$\max_{k_i} |\lambda_{k_i}(h)| \leqslant \sigma + h, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

и

$$\sup_{-\infty<x_i<\infty} \left| \frac{S_h(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| \leqslant M.$$

Эта теорема обобщает результат В. А. Марченко на случай целых функций от нескольких переменных. При $n=1$ мы получаем теорему, аналогичную теореме Марченко, но при более слабых ограничениях, наложенных на $\alpha(t)$ *. Как и у Марченко, наиболее трудным пунктом при доказательстве теоремы 2 является построение особого ядра, т. е. целой функции $\Phi(z)$ конечной степени 1, удовлетворяющей условию $\Phi(hx)\,\alpha(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ по крайней мере для одной последовательности значений $h$, стремящейся к нулю ($\alpha(x)$ удовлетворяет условию б) и одному из условий в) и г)).

Существование такого ядра утверждается в теоремах:

---

* В. А. Марченко требует, чтобы $\alpha(t)$ удовлетворяло одновременно и условию в) и условию г). Мы требуем выполнения по крайней мере одного из этих условий.

Теорема 3. *Пусть положительная функция* $\alpha(t)$ *мажорируется функцией* $\alpha^*(t)$ $(\alpha^*(t) \geqslant \alpha(t))$, *удовлетворяющей условиям* б) *и* в). *Тогда существует функция* $\Phi(z)$ *конечной степени не выше заданного* $\sigma$ *и такая, что* $\lim\limits_{|x|\to\infty} \Phi(\lambda x)\alpha(x) = 0$ *при любом вещественном* $\lambda$.

Теорема 4. *Пусть положительная функция* $\alpha(t)$ *мажорируется функцией* $\alpha^*(t)$, *удовлетворяющей условиям* б) *и* г). *Тогда существует целая функция* $\Phi(z)$ *конечной степени, не превышающей наперед заданного* $\sigma$, *и такая, что* $\lim\limits_{|x|\to 0} \Phi(x/m)\alpha(x) = 0$ *при любом целом* $m$.

Доказательства этих теорем похожи, хотя значительно отличаются в деталях. Мы приведем здесь доказательство только теоремы 3, на наш взгляд, более важной. При этом нам понадобится

Лемма. *Если положительная неубывающая на* $(0, \infty)$ *непрерывная функция* $\alpha(x)$ *удовлетворяет условию* $\int\limits_0^\infty \frac{\ln\alpha(x)}{1+x^2}\,dx < \infty$, *то существует функция* $\xi(x)$ *такая, что* $\xi(x) \to \infty$ *при* $|x| \to \infty$, *функция* $\alpha(x\xi(x))$ *не убывает и* $\int\limits_0^\infty \frac{\ln\alpha(x\xi(x))}{1+x^2}\,dx < \infty$.

Доказательство леммы мы опускаем.

Пусть $\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)\,\alpha^*(x\xi(|x|))}$, где $\xi(x)$ — функция, удовлетворяющая требованиям леммы. Ясно, что $\varphi(x) \in \mathscr{L}^2$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\varphi(x)}{1+x^2}\,dx < \infty$ (не нарушая общности, можно считать, что $\alpha^*(t) > 1$). По теореме Винера—Палея ([8]), существует функция $\psi(x)$ такая, что почти всюду $|\psi(x)| = \varphi(x)$ и преобразование Фурье функции $\psi(x)$ обращается в нуль при $t > 0$. Возьмем свертку $\Phi(x)$ функций $\psi(t)e^{-i\sigma t}$ и $\psi(-t)e^{i\sigma t}$

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\,e^{-i\sigma t}\,\psi(t-x)\,e^{i\sigma(x-t)}\,dt.$$

Ясно, что преобразование Фурье свертки $\Phi(x)$ обращается в нуль при $|t| \geqslant \sigma$ и, следовательно, по теореме Винера — Палея $\Phi(x)$ является значением некоторой целой функции $\Phi(z)$ степени не выше $\sigma$. Оценим $|\Phi(\lambda x)|$:

$$|\Phi(\lambda x)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\varphi(t-\lambda x)\,dt \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\lambda x/2} + \int\limits_{\lambda x/2}^{\infty} \varphi(t)\,\varphi(t-\lambda x)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \varphi\left(\frac{\lambda x}{2}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,dt = \frac{A}{\left(1+\left(\frac{\lambda x}{2}\right)^2\right)\alpha^*\left(\frac{\lambda x}{2}\,\xi\left(\left|\frac{\lambda x}{2}\right|\right)\right)},$$

где $A = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,dt$.

Последнее неравенство имеет место в силу четности и монотонности $\varphi(x)$. Далее, так как $\xi(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$, то найдется такое число $x_\lambda$, что при $|x| > x_\lambda$ будет выполняться неравенство $\left|\frac{\lambda x}{2}\right|\xi\left(\left|\frac{\lambda x}{2}\right|\right) > |x|$ и, в силу монотонности $\alpha^*(|x|)$, и неравенство

$\alpha^*\left(\frac{\lambda x}{2}\xi\left(\left|\frac{\lambda x}{2}\right|\right)\right)\geqslant\alpha^*(x)$. Отсюда следует, что при $|x|>x_\lambda$

$$|\Phi(\lambda x)\alpha(x)|\leqslant\frac{\alpha^*(x)}{\left(1+\left(\frac{\lambda x}{2}\right)^2\right)\alpha^*\left(\frac{\lambda x}{2}\xi\left(\left|\frac{\lambda x}{2}\right|\right)\right)}\leqslant\frac{A}{1+\left(\frac{\lambda x}{2}\right)^2}.$$

Полученное неравенство доказывает теорему.

После того как доказаны теоремы 1, 3 и 4, доказательство теоремы 2 не представляет затруднений и почти дословно воспроизводит доказательство теоремы Марченко (см. ([7])).

Перечислим теперь несколько условий, достаточных для того, чтобы некоторая функция $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяла условиям теоремы 2:

1) *Если* $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)\leqslant\gamma(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2})$ *и* $\gamma(t)$ *удовлетворяет условиям* б) *и* в).

Действительно, в таком случае

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)\leqslant\gamma(nx_1)\gamma(nx_2)\ldots\gamma(nx_n).$$

2) *Если* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{1+x_k^2}dx_k<\infty,\quad k=1, 2, \ldots, n$ *и*

$\alpha(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)\leqslant\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)\alpha(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Действительно, в таком случае

$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)\leqslant\alpha(x_1, 0, \ldots, 0)\alpha(0, x_2, 0, \ldots, 0)\ldots\alpha(0, \ldots, 0, x_n)$.

3) *Если* $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *является четной по каждой переменной, монотонна по каждой переменной и есть* $n$ *неравных нулю* $\lambda_k$ *таких, что*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\alpha(\lambda_1 t, \lambda_2 t, \ldots, \lambda_n t)}{1+t^2}dt.$$

Действительно, $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)\leqslant\alpha(x_1, x_1, \ldots, x_1)\alpha(x_2, x_2, \ldots, x_2)\ldots$ $\ldots\alpha(x_n, x_n, \ldots, x_n)$ и $\alpha(x, x, \ldots, x)$ удовлетворяет условиям б) и в).

Замечание. Утверждение теорем 3, 4 и 2 остаются в силе при замене условий в) и г) несколько более слабыми условиями:

в′) *существует постоянная* $m$ *такая, что* $\alpha(m|t|)\geqslant\alpha(|t|)$, *начиная с некоторого* $t_0$,

и

г′) *существуют четная, монотонно неубывающая на* $(0, \infty)$, *удовлетворяющая условию* б) *функция* $\beta(x)$ *и положительное число* $m$ *такие, что при любых* $x$ *и* $y$ *выполняется неравенство*

$$[\alpha(x)\alpha(y)]^m\beta(x)\beta(y)>\alpha(x+y).$$

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую признательность Б. Я. Левину за указания и постоянную помощь в работе.

Поступило
16 VII 1953

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, ДАН, 15, № 4 (1937). [2] М. Г. Крейн, Уч. зап. Куйбышевск. пед. ин-та, в. 7 (1943). [3] Н. И. Ахиезер, В. А. Марченко, Уч. зап. Харьковск. ун-та, 29 (1949). [4] С. Н. Бернштейн, ДАН, 54, № 2 (1946). [5] Н. И. Ахиезер, ДАН, 54, № 1 (1946). [6] С. Н. Бернштейн, ДАН, 54, № 6 (1946). [7] В. А. Марченко, Уч. зап. Харьковск. ун-та, 34 (1950). [8] R. Paley, N. Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain, 1934.