Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 5

МАТЕМАТИКА

М. М. ЛАВРЕНТЬЕВ

К ВОПРОСУ ОБ УЛУЧШЕНИИ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 28 VII 1953)

Пусть имеется система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

определитель которой Δ, $\Delta \neq 0$.

Пусть, кроме того, система (1) нормирована таким образом, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

В настоящей заметке приводятся два результата, относящиеся к оценке точности решения системы (1), когда числа b_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, известны с точностью до ε, а числа a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, известны точно.

Наряду с системой (1) будем рассматривать систему:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b_j + \varepsilon_j, \tag{2}$$

где $|\varepsilon_j| \leqslant \varepsilon$.

Теорема 1. *Пусть числа* $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ — *решение системы* (1), *а числа* $x''_1, x''_2, \ldots, x''_n$ — *решение системы* (2). *Тогда*

$$|x''_i - x'_i| \leqslant \frac{\sqrt{e}}{|\Delta|} \sqrt{n}\, \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Оценка асимптотически точна при больших n и $1/\Delta$.

Теорема 2. *Пусть известно, что*

$$|x'_{i+1} - x'_i| < \frac{\lambda}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Тогда по числам x''_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, можно построить такие числа $\overline{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, что

$$|\overline{x}_i - x'_i| \leqslant \sqrt[3]{\frac{6\lambda e}{\Delta^2}}\, \varepsilon^{2/3}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Числа $\overline{x}_i$ можно получить проектированием точки n-мерного пространства последовательно на $n-1$-, $n-2$-, ... мерные грани n-мерного параллелепипеда или, алгебраически, путем решения некоторой вспомогательной системы линейных уравнений с неполной матрицей.

Из теоремы 1 следует, что если правые части системы (1) известны с точностью до ε, то решение системы (1) обладает точностью $\frac{\sqrt{e}}{|\Delta|}\sqrt{n\varepsilon}$.

Теорема 2 позволяет для больших n, $n \gg \varepsilon^{-1/3}$, улучшить точность решения системы (1) с правыми частями, известными с точностью до ε, если заранее известно, что решение системы (1) достаточно гладко, т. е. удовлетворяет условиям (3).

Поступило
26 V 1953